pro Jahr

**Rein lineare Verzinsung**

Kapitalbindungsdauern:

Berechne das gesamte angesparte Kapital für die folgenden Kapitalbindungsdauern:

* Ein ganzes Jahr
* Drei Monate
* Ein halbes Jahr

Ein ganzes Jahr

Drei Monaten

Ein halbes Jahr:

 pro Jahr

**Rein lineare Verzinsung**

Kapitalbindungsdauern:

Berechne das gesamte angesparte Kapital für die folgenden Kapitalbindungsdauern:

* Ein halbes Jahr
* Eineinhalb Jahre
* Ein Jahr, 8 Monate
* Fünf Jahre

Ein ganzes Jahr

Drei Monaten

Ein halbes Jahr:

Eineinhalb Jahre:

Ein Jahr, 8 Monate:

Fünf Jahre:

Einschub:

 pro Jahr

**Zinszuschlag am Ende des Jahres**

Anlage über 2,5 Jahre

Nach einem Jahr:

Nach zwei Jahren:

Nach 2,5 Jahre:

Formel für den Spezialfall ganzer Jahre:

 (T ist eine natürliche Zahl)

 pro Jahr

**Zinszuschlag am Ende des Jahres (= mit Zinseszins)**

**Kapitalbindungsdauern:**

**Berechne das gesamte angesparte Kapital für die folgenden Kapitalbindungsdauern:**

* **Ein halbes Jahr**
* **Eineinhalb Jahre**
* **Ein Jahr, 8 Monate**
* **Fünf Jahre**

Halbes Jahr:

Eineinhalb Jahre:

Ein Jahr, acht Monate:

Fünf Jahre:

- In Teilschritten:

Allgemein: Am Ende des n-ten Jahres, wobei n eine natürliche Zahl sei, hat man:

Hier: n=5

--

29.10.2024

Zinseszinsrechnung: Zins pro Monat, Zinszuschlag am Ende jedes Monats

 pro Monat

Kapitalbindungsdauern: Siehe oben

Halbes Jahr:

Eineinhalb Jahre:

Ein Jahr, acht Monate:

Fünf Jahre:

--

Einschub: Die „e-Funktion“

Eulersche Zahl 2.71828

Was ist die Exponentialfunktion (auch: „e-Funktion“)?

Beispiele:

Stetige Zinseszinsrechnung

 pro Jahr, stetige Verzinsung

Halbes Jahr:

Eineinhalb Jahre:

Ein Jahr, acht Monate:

Fünf Jahre:

Einschub: Kapital nach zweieinhalb Jahren mit stetiger Verzinsung

mit

Rechenregel von

Das heißt:

 lässt sich interpretieren als eine stetige Verzinsung (mit dem Zins )

Einschub: Vergleich der Verzinsungsverfahren mit Zinseszinsen

 und r=7% pro Jahr

Kapital bei unterschiedlichen Verzinsungsverfahren mit Zinseszinsen nach 1, 2, 3, 4 und 5 Jahren (Kapitalbindungsdauer ganzer Jahre)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Verzinsungsverfahren |  |  |  |  |  |
| Jährlicher Zinszuschlag | 214,0000 | 228,9800 | 245,0086 | 262,1592 | 280,5103 |
| Monatlicher Zinszuschlag | 214,4580 | 229,9612 | 246,5851 | 264,4108 | 283,5251 |
| Täglicher Zinszuschlag | 214,5002 | 230,0516 | 246,7306 | 264,6188 | 283,8039 |
| Stetige Zinseszinsrechnung | 214,5016 | 230,0548 | 246,7356 | 264,6260 | 283,8135 |

Konkrete Berechnung:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Verzinsungsverfahren | Kapital nach einem Jahr  | Kapital nach zwei Jahren  | Kapital nach drei Jahren  |
| Jährlicher Zinszuschlag | 200∙(1+0,07) | 200∙ | 200∙ |
| Monatlicher Zinszuschlag | 200∙ | 200∙ | 200∙ |
| Täglicher Zinszuschlag | 200∙ | 200∙ | 200∙ |
| Stetige Zinseszinsrechnung | 200∙exp(1∙0,07) | 200∙exp(2∙0,07) | 200∙exp(3∙0,07) |

Je kürzer das Intervall, an dessen Ende die Zinsen dem Kapital zugeschlagen werden, desto höher ist (ceteris paribus) der Zinseszinseffekt, und damit auch der Betrag, den man am Ende angespart hat.

Den maximalen Zinseszinseffekt hat man bei der stetigen Verzinsung.

Aufgabe 2.1 (Aufgabensammlung Prof. Dr. Nietert)

Heute: 30.04.2010

Teilaufgabe b)

Anfangsinvestition: 500 Euro.

Verzinsung: 2,75% pro Jahr bis 2015, danach 1,75%.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| Zeitpunkt | Vermögen auf dem Konto | Zahlung |
| 30.04.2010 | 500 | -500 |
| 01.03.2011 |  | 0 |
| 01.03.2012 |  | 0 |
| 01.03.2013 |  | 0 |
| 01.03.2014 |  | 0 |
| 01.03.2015 | 170,0534 (siehe \*) | 400 |
| 01.03.2016 | 170,0534 | 0 |
| 01.03.2017 |  |  |

(\*): =170,0534

Der gesuchte Zahlungsstrom:

|  |  |
| --- | --- |
| Zeitpunkt | Zahlung |
| 30.04.2010 | -500 |
| 01.03.2011 | 0 |
| 01.03.2012 | 0 |
| 01.03.2013 | 0 |
| 01.03.2014 | 0 |
| 01.03.2015 | 400 |
| 01.03.2016 | 0 |
| 01.03.2017 |  |

Oder die horizontale Schreibweise:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Zeitpunkt | 30.04.2010 | 01.03.2011 | 01.03.2012 | 01.03.2013 | 01.03.2014 | 01.03.2015 | 01.03.2016 | 01.03.2017 |
| Zahlung | -500 | 0 | 0 | 0 | 0 | 400 | 0 | 176,06 |

05.11.2024

Teilaufgabe d)

Zeitpunkt:

30.04.2010

Relevanter Eintrag in Tabelle: zweite Zeile (siehe ISIN-Nummer)

Anlage 100 Euro

Zinstermin: jeweils zum 1.3.

Einschub (nicht Teil der Aufgabe):

Frage: Welcher durchschnittlichen Verzinsung entspricht der Bundesschatzbrief?

Annahme: Investition bereits am 01.03.2010

0,024545364943673764

Ende Einschub.

Zahlungsstrom:

|  |  |
| --- | --- |
| Zeitpunkt | Zahlung |
| 30.04.2010 | -100 |
| 01.03.2011 | 0 |
| 01.03.2012 | 0 |
| 01.03.2013 | 0 |
| 01.03.2014 | 0 |
| 01.03.2015 | 0 |
| 01.03.2016 | 0 |
| 01.03.2017 | 118,45 |

Zwischenzeitpunkte: Zahlung von 0, da Zinsen (beim Typ B) nicht zwischenzeitlich ausgezahlt werden, sondern bis zur Fälligkeit kumuliert werden.

12.11.2024

Aufgabe 2.2 (Aufgabensammlung Vorlesung)

Zeitstruktur:

: „heute“

: in einem Jahr

: in zwei Jahren

: in drei Jahren

: in vier Jahren

Gegeben:

Weitergegeben: Wachstumsraten der Zahlungen

Der gesuchte Zahlungsstrom

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Zeitpunkt | t+1 | t+2 | t+3 | t+4 |
| Zahlung | 10000 |  |  |  |

Aufgabe 2.3 (Aufgabensammlung Vorlesung)

Gegeben:

Wichtig: Es wird hier ein „Lag“ unterstellt, d.h. Zahlung in hängt vom Wachstum in der Vorperiode (nicht ab).

a=9000

b=100000

Setze das Wirtschaftswachstum in diese Gleichung ein:

Aufgabe 2.4 (Aufgabensammlung Vorlesung)

Wesentlicher Punkt: Abschreibungen sind keine Zahlungen -> ignorieren

(variable) Einzahlungen:

t+1: 100 Stück \* 100 EUR =10000

100 Stück: verkaufte Menge

100 EUR: Preis pro verkaufter Einheit

t+2: 150\* 100 = 15000

t+3: 100\*110=11000

t+4: 200\* 120=24000

Auszahlungen (variabel + fix):

t+1: 100 Stück\*50 EUR +6000 =11000

50 EUR: variable Auszahlung pro Stück, 6000 fixe Auszahlung für Löhne

t+2: 150\*60+6000 = 15000

t+3: 100\*60+6000=12000

t+4: 200\*70+7000=21000

Saldo: Einzahlungsüberschuss:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Zeitpunkt | t+1 | t+2 | t+3 | t+4 |
| Einzahlung – Auszahlung | 10000-11000=-1000 | 15000-15000=0 | 11000-12000=-1000 | 24000-21000=3000 |

Oder man schreibt einfach ohne Zwischenergebnis:

t+1: 100\*(100 - 50) – 6000 = -1000

t+2: 150\*(100 - 60) – 6000 = 0

t+3: 100\*(110 - 60) – 6000 = -1000

t+2: 200\*(120 - 70) – 7000 = 3000

Aufgabe 2.7 (Aufgabensammlung Vorlesung)

1. Kapitalwert

Gegeben:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | t | t+1 | t+2 | t+3 |
| IO1 | -100 | 70 | 40 | 40 |
| IO2 | -100 | 20 | 90 | 50 |

Zinssatz = 10% (wichtig: unabhängig von der Kapitalbindungsdauer)

IO = Investitionsobjekt

Falls man sich für ein Objekt entscheiden muss:

Wähle IO2

Prinzipiell sind beide Objekte vorteilhaft, aber IO2 hat einen höheren (positiven) Kapitalwert

Falls man beide Objekte kombinieren kann:

Beide Objekte sind vorteilhaft, also führe beide durch.

19.11.2024

Aufgabe 2.6 (Aufgabensammlung Vorlesung)

1. Welche Objekte sind effizient?
* Antwort: IO 4 wird dominiert durch IO1 (oder auch durch IO3) => damit ist IO4 per Definition ineffizient.
* IO1, IO2, und IO3 sind effizient: Begründung (Zeige für jedes dieser drei Objekte, dass es von keinem der beiden anderen dominiert wird; Argumentation z. B. über Maximale Zielwerte bei einzelnen Zielen (siehe Folien))
1. Füge neues Objekt IO5 = (-100, 70, 70, 70) ein. Welche Objekte sind effizient?
* Antwort: Nur das neue Objekt ist effizient. (alle anderen entsprechen ineffizient)
1. Wie ändert sich die Menge der effizienten Objekte (ausgehend von den Objekten IO1, IO2, IO3 und IO4, d.h. IO5 existiert in diesem Aufgabenteil nicht), wenn man IO3 streicht?
* Antwort: IO1 und IO2 sind effizient; IO4 ist ineffizient.
* Beachte: IO4 wurde auch durch IO1 dominiert.
1. Wie ändert sich die Menge der effizienten Objekte (ausgehend von den Objekten IO1, IO2, IO3 und IO4, d.h. IO5 existiert in diesem Aufgabenteil nicht), wenn man IO4 streicht?
* Antwort: IO4 war ineffizient, insofern sind weiterhin IO1, IO2 und IO3 effizient.

26.11.2024

Aufgabe 2.1 a)

„heute“: 30.04.2010

Problem: Bestimme Zahlungsstrom einer Bundesanleihe (inklusive Anfangsauszahlung = Preis, den man bei Kauf bezahlt).

Nennwert: Kann als 100 Euro angenommen werden (nur in % angegeben)

Kurs =clean price = 100 EUR\*107,98% =107,98 EUR

Kuponsatz =3,75%

Kuponzahlung = Kuponsatz \* Nennwert = 3,75 EUR

Kupon wird immer am 04.01 eines jeden Jahres gezahlt

Fällig am: (letzte Kuponzahlung) 04.01.2015

Wichtig! Man bezahlt nicht nur den Kurs, sondern auch die Stückzinsen, d.h. der tatsächlich gezahlte Preis („Dirty Price“) = Kurs + Stückzinsen

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| „heute“ 30.04.2010 | 04.01.2011 | 04.01.2012 | 04.01.2015 | 04.01.2015 | 04.01.2015 |
| -109,1833 EUR | 3,75 EUR | 3,75 EUR | 3,75 EUR | 3,75 EUR | 3,75 EUR+100 EUR = 103,75 EUR |

Berechnung der Stückzinsen:

Vom 4.1. 2010 bis zum 30.04.2010 hat der Verkäufer die Anleihe gehalten -> anteilig für diesen Zeitraum erhält er einen Teil des nächsten Kupons von 3,75 Euro.

Annahme: Wir rechnen mit standardisierten Zeiträumen (d.h. 30 Tage pro Monat, 360 Tage pro Jahr)

Drei volle Monate (Februar, März, April) zu je 30 Tagen -> 90 Tage

Im Januar: verbleiben 26 Tage (4 von 30 Tagen sind bereits vergangen)

Somit: 90 + 26 = 116 Tage

Tage im Finanzjahr: 360

Stückzinsen: ∙ 3,75 = 1,2083

„Dirty Price“ = Kurs + Stückzinsen = 107,98+1,2083 =109,1833

Aufgabe 2.1 c)

Nullkuponanleihe

* Es gibt keinen jährlichen Kupon, keine Stückzinsen

Nennwert: 100 Euro

|  |  |
| --- | --- |
| „heute“ 30.04.2010 | 04.07.2039 |
| -32,505 | 100 |

(Kurs = 32,505% \* Nennwert)

Aufgabe 2.1 e)

(Sicht des Kreditnehmers)

Laufzeit: 24 Monate, Kredit in Annuitätenstruktur: 333 Euro am Ende jedes Monats

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Heute: 30.04.2010 | 30.05.2010 | 30.06.2010 | … | 30.04.2012 |
| 7500 | -333 | -333 | … | -333 |

Aufgabe 2.1 f)

Annuitätenkredit:

Erste Teilaufgabe: Zahlungsstrom: (Sicht des Kreditnehmers)

Konstante Zahlung: jeweils nach einem Jahr 26,26236 Euro

Laufzeit: 4 Jahre

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Heute: 30.04.2010 | 30.04.2011 | 30.04.2012 | 30.04.2013 | 30.04.2014 |
| 95 | -26,26236 | -26,26236 | -26,26236 | -26,26236 |

95% \* 100 = 95 EUR (Disagio)

Zweite Teilaufgabe: Zins- und Tilgungsstaffel

* Gibt an, wie sich die ausstehende Restlaufzeit im Zeitverlauf ändert; gibt Aufteilung von Annuität in Zins- und Tilgungszahlungen an

Zinssatz = 2%

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Kreditbetrag Periodenbeginn | Zinszahlung | Tilgungszahlung | Annuität | Kreditbetrag Periodenende |
| t+1 | 100  | 2% \* 100 = 2 EUR | 26,26236 -2=24,26236 | 26,26236 | 100 - 24,26236 =75,7376  |
| t+2 | 75,7376 | 2%\*75,7376= 1,5148 | 26,26236 - 1,5148=24,7476 | 26,26236 | 75,7376 -24,7476= 50,99 |
| t+3 | 50,99 | 2%\*50,99 = 1,0198 | 26,2624 - 1,0198= 25,2426 | 26,26236 | 50,99 - 25,2426 = 25,7475 |
| t+4 | 25,7475 | 2% \* 25,7475 = 0,5149 | 26,2624 - 0,5149 = 25,7475 | 26,26236 | 25,7475 - 25,7475 = 0 |

(Wir nehmen an, dass „Auszahlungsbetrag (vor Disagio)“ von 100 gleich dem Nennbetrag ist.)

03.12.2024

Übungsblatt 2, Aufgabe 2.2 a)

Einträge: in Tausend Geldeinheiten, d.h. -20 entspricht -20000 Euro

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | t=0 | t=1 | t=2 | t=3 | t=4 | t=5 | t=6 | t=7 | t=8 |
| IO1 | -20 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| IO2 | -20 | 9 | 1 | 1 | 4 | 4 | 4 | 4 | 0 |

Zins = 8%, konkurrierende Objekte

1. Vergleichen Sie die Objekte anhand des klassischen Kapitalwerts!

Entspricht: 1211,55 Euro

Entspricht: 501,60 Euro

Antwort: Wähle IO1, da IO1 den höheren (positiven) Kapitalwert hat und beide Objekte sich ausschließen (d.h. konkurrierend sind).

1. Vergleichen Sie die Objekte anhand des klassischen Endwerts!

Endwert ist ungefähr gleich 2242,49 Euro

928,42 Euro

Antwort: Wähle IO1, da IO1 den höheren (positiven) Endwert hat und beide Objekte sich ausschließen (d.h. konkurrierend sind).

Alternative (und schnellere Rechnung):

Beispiel:

2242.49

Gleiches Ergebnis, nur schnellerer Rechenweg.

(Einschub: Barwert/Kapitalwert einer Annuität

Allgemein:

Annuität:

Rentenbarwertfaktor =

Wiedergewinnungsfaktor =

⬄

Herleitung:

(1):

Nach dem Multiplizieren (1) mit (1+i) erhalten wir (2):

(2)-(1):

⬄

⬄

Einschub Ende)

Anwendung: Annuitätenmethode:

Berechne die Annuität von IO1:

(d.h. der konstante Betrag, den man aus IO1 von Periode zu Periode entnehmen kann)

Ansatz (siehe Folien):

D.h.: rechte Seite ist der Barwert eines Zahlungsstroms in Höhe von Z in den Zeitpunkten 1 bis 8 bei einem Zinssatz von 8%.

Einzige unbekannte: Z

Löse Gleichung nach Z auf:

Leichtere Berechnung:

Annuität von IO1:

IO2:

Entsprechend:

Ergebnis:

Wähle IO1, da es die höhere (positive) Annuität als IO2 aufweist und beide Objekte konkurrieren.

Hinweis zur Aufgabe 2.7b)

Wiedergewinnungsfaktor:

- Wenn die Notation der Zeitpunkte wie folgt aussieht: 0, 1, 2, …T

- Wenn die Notation der Zeitpunkte wie folgt aussieht: t, t+1, t+2, …T

Bei der Aufgabe 2.7b):

Zeitpunkte sind t, t+1, t+2 und t+3

T – t = (t+3) – t = 3

10.12.2024

Aufgabe 2.9

Interner Zinsfuß:

Referenz-Zinssatz (hurdle rate) = 5%

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | t=0 | t=1 | t=2 |
| IO1 | -100 | 70 | 40 |
| IO2 | -100 | 20 | 90 |

Schritt 1: Berechne den internen Zinsfuß von IO1

Lösungsmöglichkeit (andere Ansätze sind denkbar und ok):

Variante 1:

, multipliziere beide Seiten der Gleichung mit :

--

Mitternachtsformel:

Seien a, b und c Konstanten, wobei

X ist die Unbekannte

--

, somit ist

, fällt weg.

Variante 2:

p-q-Formel:

Zwei Lösungen:

Dividiere durch 40, um bei einen Koeffizienten von 1 zu erhalten:

Für Klausur: Es reicht, die positive Lösung „x1“ zu berechnen (bzw. den zugehörigen internen Zinsfuß)

Rücksubstitution:

Zweite Lösung:

-2.68210403685012

* Negative Lösung ist ökonomisch nicht interpretierbar -> wird ignoriert

Schritt 2: Berechne den internen Zinsfuß von IO2:

Lösung: interner Zins

( fällt weg) (Herleitung/Berechnung: analog zu IO1).

Schritt 3: Antwortsatz:

Grundsätzlich sind beide Objekte vorteilhaft, da die internen Zinsfüße (7,28% bzw. 5,39%) größer als der Referenz-Zinssatz (hurdle rate) von 5% sind.

* Wenn beide Objekte sich ausschließen: -> wähle IO1, da dieses den höheren internen Zinsfuß hat
* Wenn beide Objekte sich nicht ausschließen:-> wähle beide Objekte, da beide vorteilhaft sind.

Aufgabe 2.7 c)

Zins = 10%

Gegeben:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | t | t+1 | t+2 | t+3 |
| IO1 | -100 | 70 | 40 | 40 |
| IO2 | -100 | 20 | 90 | 50 |

Vergleiche IOs mittels Amortisationsdauer!

IO1:

(Zeitpunkt t: -100< 0, offensichtlich noch keine Amortisation, da nur Auszahlung von 100, aber keine Einzahlung)

t+1:

Saldo:

* Noch keine Amortisation

t+2:

Trick:

t+3:

Oder mit Trick:

Amortisationsdauer = 3 Jahre

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | t | t+1 | t+2 | t+3 |
| IO1 | -100 | 70 | 40 | 40 |
| **IO2** | **-100** | **20** | **90** | **50** |

IO2:

t:

t+1:

t+2:

t+3:

Amortisationsdauer = 3 Jahre

Vergleich:

Beide Objekte sind prinzipiell vorteilhaft, da sie sich amortisieren

* Wenn man beide Objekte durchführen kann: wähle beide aus
* Wenn man nur eines durchführen kann: Keine Entscheidung möglich, man ist indifferent