

Holomorphe Zusammenhänge und flache Strukturen auf holomorphen Vektorbündeln

Diplomarbeit
von
Sönke Rollenske

angefertigt am
Mathematischen Institut der Universität zu Köln
unter Anleitung von Prof. Dr. Daniel Huybrechts.
Köln, Wintersemester 2004/2005

Vorwort

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit holomorphen Vektorbündeln auf komplexen Mannigfaltigkeiten.

M. Atiyah hat 1957 in seinem Artikel *Complex analytic connections in fibre bundles* [2] zu einem Vektorbündel eine natürliche Kohomologieklass - die heutige Atiyah-Klasse - eingeführt, die genau dann verschwindet, wenn das Bündel einen holomorphen Zusammenhang besitzt. Er zeigt, dass ein Vektorbündel mit einem holomorphen Zusammenhang auf einer Kurve eine flache Struktur besitzt und wirft damit die Frage auf, die uns im folgenden beschäftigen wird:

Sind auf komplexen bzw. projektiven Mannigfaltigkeiten Vektorbündel, die einen holomorphen Zusammenhang zulassen, schon flach?

Diese Frage wurde von A. Morimoto in [20] für komplexe Tori und von I. Biswas für projektive Mannigfaltigkeiten, die gewissen numerischen Bedingungen an die Harder-Narasimhan-Filtrierung des Tangentialbündels genügen, in [5] positiv beantwortet.

Ziel dieser Arbeit ist es, das Verhältnis von flachen Vektorbündeln und Vektorbündeln mit holomorphen Zusammenhang weiter zu untersuchen. Dafür studieren wir das Verhalten von solchen Vektorbündeln unter gewissen Abbildungen und erhalten damit weitere Beispiele von Mannigfaltigkeiten, auf denen die beiden Klassen von Vektorbündeln übereinstimmen.

Ferner zeigen wir, dass es genügen würde, die obige Frage auf Flächen zu lösen, und geben unter Benutzung des Resultates von Biswas eine vollständige Antwort für Flächen nicht positiver Kodaira-Dimension.

Im einzelnen werden wir wie folgt vorgehen: Nachdem wir einige Notationen fixiert haben, führen wir die Gegenstände unserer Untersuchungen, holomorphe Zusammenhänge, die Atiyah-Klasse und flache Vektorbündel, ein und stellen einige Eigenschaften zusammen.

Der folgende Abschnitt 2 stellt die Ergebnisse von Atiyah über Vektorbündel mit holomorphem Zusammenhang vor.

Abschnitt 3 ist dem Resultat von Biswas gewidmet.

In Abschnitt 4 kommen wir zu den eigenen Ergebnissen. Wir reduzieren die Frage auf den Fall von Flächen und zeigen dann, dass sie kompatibel mit birationalen Abbildungen, endlichen Überlagerungen und gewissen Faserungen und Produkten ist.

Abschließend wenden wir die erzielten Ergebnisse in Abschnitt 5 auf projektive Flächen an.

Sätze, Definitionen u.a. werden in jedem Abschnitt durchgehend nummeriert. So findet sich zum Beispiel Korollar 1.6 direkt nach Proposition 1.5 in Abschnitt 1.

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbereitungen	2
1.1	Holomorphe Zusammenhänge und die Atiyah-Klasse	3
1.2	Flache Vektorbündel	5
1.3	Kurven und der Projektive Raum	7
2	Existenz von holomorphen Zusammenhängen	9
2.1	Vektorbündel auf kompakten Kurven	9
2.2	Vektorbündel auf höherdimensionalen Varietäten	9
2.3	Ein Gegenbeispiel	11
3	Das Resultat von I. Biswas	14
4	Eigene Ergebnisse	21
4.1	Reduktion auf Flächen	21
4.2	Aufblasungen und birationale Morphismen	23
4.3	Reguläre, endliche Überlagerungen	25
4.4	Faserungen	27
4.5	Infinitesimale Produkte	29
5	Projektive Flächen	33
5.1	Kodaira-Dimension $-\infty$	33
5.2	Kodaira-Dimension null	34
5.3	Kodaira-Dimension eins und zwei	34
A	Anhang	35
A.1	Kohärente Garben mit holomorphem Zusammenhang	35
A.2	Parallelverschiebung mit holomorphen Zusammenhängen	36
	Literatur	41
	Danksagung	43

1 Vorbereitungen

In diesem Abschnitt sollen zunächst einige Konventionen fixiert werden. Dann definieren wir die beiden betrachteten Klassen von Vektorbündeln, flache Bündel und Bündel mit holomorphem Zusammenhang, und studieren deren elementare Eigenschaften. Abschließend beginnen wir den Vergleich der beiden Klassen.

Wir wollen holomorphe Vektorbündel auf komplexen Mannigfaltigkeiten betrachten, die wir immer als zusammenhängend annehmen. Unser Interesse richtet sich hauptsächlich auf kompakte, projektive Mannigfaltigkeiten, manchmal werden wir auch offene Mannigfaltigkeiten zulassen. Wir unterscheiden nicht zwischen Vektorbündeln und lokal freien Garben.

Mit allen Bezeichnungen und Notationen halten wir uns eng an das Buch von D. Huybrechts [14].

Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit, so bezeichnen wir mit \mathcal{T}_X das holomorphe Tangentialbündel. Das komplexifizierte Tangentialbündel der zugrunde liegenden reellen Mannigfaltigkeit zerlegt sich

$$T_{\mathbb{C}}X = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X.$$

Dann bezeichnen wir mit

$$\Lambda^{p,q}X = \Lambda^p(T^{1,0}X)^* \otimes \Lambda^q(T^{0,1}X)^*$$

das Bündel der (p, q) -Formen auf X und wir haben

$$\Lambda^k X = \Lambda^k(T_{\mathbb{C}}X)^* = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}X.$$

Ist $E \rightarrow X$ ein Vektorbündel, so bezeichnen wir mit

$$\mathcal{A}^{p,q}(X, E) = \mathcal{A}^0(X, \Lambda^{p,q}X \otimes E)$$

die (p, q) -Formen mit Werten in E auf X .

Ist ∇ ein Zusammenhang auf einem Vektorbündel, so bezeichnen wir mit F_{∇} dessen Krümmung.

Unter dem *Chernzusammenhang* auf einem hermiteschen Vektorbündel verstehen wir den eindeutigen Zusammenhang, der sowohl mit der hermiteschen als auch mit der komplexen Struktur verträglich ist. Das letztere meint, dass der $(0, 1)$ -Anteil genau der $\bar{\partial}$ -Operator ist.

Standardresultate wie Serre-Dualität oder Kodaira-Verschwindungssatz werden wir ohne weiteren Kommentar benutzen. Für Beweise verweisen wir wieder auf [14].

Einige der zitierten Sätze sind in der Literatur für Schemata bewiesen. Im Lichte des Resultates von Serre in [23] werden wir diese in unserem Kontext anwenden (vgl. auch [13], Appendix B).

1.1 Holomorphe Zusammenhänge und die Atiyah-Klasse

Zu jedem komplexen Vektorbündel E auf einer komplexen Mannigfaltigkeit kann man einen Zusammenhang im Sinne der Differentialgeometrie finden, i.e. eine \mathbb{C} -lineare Abbildung

$$\nabla : \mathcal{A}^0(X, E) \rightarrow \mathcal{A}^1(X, E),$$

die die Leibnizregel $\nabla(f \cdot s) = df \otimes s + f \cdot \nabla s$ für jeden Schnitt s und jede \mathbb{C}^∞ -Funktion f erfüllt.

Analog definiert man einen holomorphen Zusammenhang. Wir halten uns hier eng an die Darstellung in [14], Kapitel 4.

Sei E ein holomorphes Vektorbündel auf X und $X = \bigcup U_i$ eine Überdeckung von X , zu der holomorphe Trivialisierungen $\phi_i : E|_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{C}^r$ existieren.

Definition 1.1 — *Ein holomorpher Zusammenhang auf E ist eine \mathbb{C} -lineare Abbildung (von Garben)*

$$D : E \rightarrow \Omega_X^1 \otimes E,$$

so dass $D(f \cdot s) = \partial f \otimes s + f \cdot D(s)$ für jede lokale holomorphe Funktion f und jeden lokalen Schnitt s von E gilt.

Insbesondere bildet D holomorphe Schnitte von E in holomorphe Schnitte von $\Omega_X^1 \otimes E$ ab.

Viele Eigenschaften von gewöhnlichen Zusammenhängen gelten in angepasster Form auch für holomorphe Zusammenhänge. Sind D und D' holomorphe Zusammenhänge, so ist die Differenz $D - D'$ ein holomorpher Schnitt in $\Omega_X^1 \otimes \text{End}(E)$, das heißt der Raum aller holomorphen Zusammenhänge ist in natürlicher Weise ein affiner Raum über $\Gamma(X, \Omega_X^1 \otimes \text{End}(E))$.

Lokal ist D von der Form $\partial + A$, wobei A eine Matrix holomorpher 1-Formen ist, und induziert somit eine \mathbb{C} -lineare Abbildung $D : \mathcal{A}^0(E) \rightarrow \mathcal{A}^1(E)$, die $D(f \cdot s) = \partial f \otimes s + f \cdot D(s)$ erfüllt. Mit anderen Worten: D sieht aus wie der (1,0)-Anteil eines gewöhnlichen Zusammenhangs und $\nabla = D + \bar{\partial}$ definiert einen solchen, der mit der holomorphen Struktur verträglich ist.

Im allgemeinen ist der (1,0)-Anteil eines gewöhnlichen Zusammenhangs jedoch kein holomorpher Zusammenhang, denn ein gewöhnlicher Zusammenhang bildet nicht unbedingt holomorphe Schnitte auf holomorphe Schnitte ab. Weiter unten werden wir studieren, unter welchen Umständen dies der Fall ist.

Bemerkung 1.2 — Vektorbündel, die einen holomorphen Zusammenhang besitzen, sind im Gegensatz zur differenzierbaren Situation, sehr speziell. Der Begriff des holomorphen Zusammenhangs hat jedoch den Vorteil, dass er sich natürlich auf kohärente \mathcal{O}_X -Garben oder sogar auf den rein algebraischen Kontext verallgemeinern lässt. In Anhang A.1 werden wir noch näher darauf eingehen.

M. Atiyah hat in [2] eine natürliche Kohomologiekategorie definiert, die das Hindernis für die Existenz eines solchen Zusammenhangs darstellt.

Definition 1.3 — Die Atiyah-Klasse $A(E) \in H^1(X, \Omega_X^1 \otimes \text{End}(E))$ ist gegeben durch den Čechkozykel

$$A(E) = \{U_{ij}, \phi_j^{-1} \circ (\phi_{ij}^{-1} \partial \phi_{ij}) \circ \phi_j\}.$$

Dies ist tatsächlich ein Kozykel wegen der Kozykeleigenschaft der ϕ_{ij} .

Bemerkung 1.4 — Es gibt unterschiedliche Vorzeichenkonventionen bei der Definition der Atiyah-Klasse. Definiert man sie als Spaltungstyp der ersten Jetsequenz von E , so bekommt man $-A(E)$. Weitere Details zur Jetsequenz findet man in [16].

Wir erlauben uns, für die folgenden Eigenschaften auf [14] (Proposition 4.2.19, Proposition 4.3.10) zu verweisen.

Proposition 1.5 — Die Atiyah-Klasse hat folgende Eigenschaften:

- (i) E hat genau dann einen holomorphen Zusammenhang, wenn $A(E) = 0$.
- (ii) Ist F_∇ die Krümmung eines Chernzusammenhangs ∇ zu einer hermiteschen Struktur auf E , so ist $[F_\nabla] = A(E)$ in $H^{1,1}(X, \text{End}(E))$.

Der erste Teil ist eine direkte Rechnung, im zweiten Teil verfolgt man den Isomorphismus zwischen Dolbeault- und Čech-Kohomologie und benutzt an geeigneter Stelle, dass ∇ hermitesch ist.

Korollar 1.6 — Besitzt ein holomorphes Vektorbündel E einen holomorphen Zusammenhang, so verschwinden alle rationalen Chernklassen.

Beweis. Die Chernklassen von E berechnen sich mittels des Chern-Weil-Homomorphismus aus der Klasse der Krümmung eines Chernzusammenhangs von E . Da E einen holomorphen Zusammenhang besitzt, verschwindet diese Klasse, d.h. alle rationalen charakteristischen Klassen sind trivial. \square

In Abschnitt 2 werden wir auf den Zusammenhang zwischen $A(E)$ und den Chernklassen noch weiter eingehen.

Nun beantworten wir noch die Frage, wann der $(1,0)$ -Anteil eines gewöhnlichen Zusammenhangs einen holomorphen Zusammenhang induziert.

Proposition 1.7 — Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit, $E \rightarrow X$ ein holomorphes Vektorbündel und ∇ ein Zusammenhang auf E , der mit der holomorphen Struktur verträglich ist, d.h. $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$. Dann sind die folgenden zwei Bedingungen äquivalent:

- (i) $\nabla^{1,0}$ ist ein holomorpher Zusammenhang.

(ii) $F_\nabla \in \Gamma(X, \Omega_X^2 \otimes \text{End}(E))$.

Beweis. Lokal hat der Zusammenhang die Form $\nabla = d + A$ mit $A \in \mathcal{A}^{1,0}(U, \text{End}(E))$ und die Krümmung ist

$$F_\nabla = dA + A \wedge A = \underbrace{\partial A + A \wedge A}_{\in \mathcal{A}^{2,0}(U, \text{End}(E))} + \underbrace{\bar{\partial} A}_{\in \mathcal{A}^{1,1}(U, \text{End}(E))}.$$

Wir sehen also

$$\begin{aligned} & \nabla^{1,0} \text{ holomorph} \\ \Leftrightarrow & A \in \Gamma(U, \Omega_X^1 \otimes \text{End } E) \\ \Leftrightarrow & \bar{\partial} A = 0 \\ \Leftrightarrow & F_\nabla \in \Gamma(X, \Omega_X^2 \otimes \text{End}(E)). \end{aligned}$$

□

1.2 Flache Vektorbündel

Wir kommen nun zu flachen Vektorbündeln, führen den Begriff jedoch direkt nur für holomorphe Vektorbündel ein.

Definition 1.8 — *Ein holomorphes Vektorbündel heißt flach, wenn es eine flache Struktur besitzt, d.h. es gibt eine trivialisierende Überdeckung $\{U_i\}$, so dass der zugehörige (holomorphe) Kozykel $\phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Gl}_r(\mathbb{C})$ konstant ist.*

Eine Darstellung der Fundamentalgruppe $\rho : \pi_1(X) \rightarrow \text{Gl}_r(\mathbb{C})$ induziert auf natürliche Weise ein Vektorbündel auf X : Ist \tilde{X} die universelle Überlagerung, so operiert $\pi_1(X)$ mit Decktransformationen auf \tilde{X} und vermittelt der Darstellung ρ auf \mathbb{C}^r . Der Quotient

$$E_\rho = \tilde{X} \times_\rho \mathbb{C}^r$$

ist dann ein Vektorbündel auf X . Der natürliche Zusammenhang d auf $\tilde{X} \times \mathbb{C}^r$ ist invariant unter der Operation der Fundamentalgruppe und steigt also ab zu einem Zusammenhang auf E_ρ . Die Krümmung dieses Zusammenhangs verschwindet, da $d^2 = 0$.

Die folgende Proposition zeigt, dass flache Vektorbündel gerade Vektorbündel von dieser Form sind.

Proposition 1.9 — *Für ein Vektorbündel E auf X sind äquivalent:*

(i) E ist flach.

(ii) *Es gibt einen Zusammenhang in E , der mit der holomorphen Struktur verträglich ist und dessen Krümmung verschwindet.*

(iii) *E wird von einer Darstellung der Fundamentalgruppe von X induziert.*

Einen solchen Zusammenhang mit verschwindender Krümmung nennen wir flach. Wir fordern für einen flachen Zusammenhang also immer die Kompatibilität mit der holomorphen Struktur.

Beweis. (i) \Leftrightarrow (ii) Sei ∇ ein flacher Zusammenhang auf E . Sei s ein lokaler Rahmen auf U , bezüglich dessen $\nabla = d + A$. Wir möchten eine Funktion $\phi : U \rightarrow Gl(r)$ finden, so dass $\nabla = d$ bezüglich des Rahmens $s' = \phi s$, das heißt

$$\begin{aligned}\phi^{-1}A\phi + \phi^{-1}d\phi &= 0 \\ \Leftrightarrow A\phi + d\phi &= 0 \\ \Leftrightarrow d\phi &= -A\phi.\end{aligned}\tag{1}$$

Die Integrabilitätsbedingung für diese Differentialgleichung auf U lautet

$$\begin{aligned}d(A\phi + d\phi) &= d(A\phi) + d^2\phi \\ &= dA\phi - A \wedge d\phi \\ &= dA\phi + A \wedge A\phi \\ &= (dA + A \wedge A)\phi \\ &= F_{\nabla}\phi = 0.\end{aligned}$$

Also gibt es lokal eine Lösung ϕ und wir können eine Trivialisierung finden, so dass lokal $\nabla = d$. Wie in (1) gilt für die Kozykelabbildungen

$$0 = \phi^{-1}0\phi + \phi^{-1}d\phi,$$

das heißt die Kozykelabbildungen sind konstant, und wir haben eine flache Struktur auf E .

Ist umgekehrt $\phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow Gl_r(\mathbb{C})$ ein lokal konstanter Kozykel, so verklebt der lokal durch d definierte Zusammenhang zu einem Zusammenhang auf E , denn es gilt $ds = \phi_{ij}^{-1}d(\phi_{ij}s)$ für einen lokalen Schnitt s .

(ii) \Leftrightarrow (iii) Eine Implikation hatten wir schon gesehen. Sei also ein flacher Zusammenhang ∇ in E gegeben. Für die Details der folgenden Konstruktion verweisen wir auf [18] (Section II.9). Da die Krümmung von ∇ verschwindet, ist der Paralleltransport mit ∇ entlang einer Kurve γ nur von der Homotopieklasse von γ abhängig, mit anderen Worten: die eingeschränkte Holonomiegruppe $Hol^0(E, \nabla)$ ist trivial. Also haben wir einen surjektiven Homomorphismus $\rho : \pi_1(X) \rightarrow Hol(E, \nabla) \subset Gl_r(\mathbb{C})$. Das Rahmenbündel

F^E von E ist reduzibel zu einem Prinzipalbündel P mit der diskreten Strukturgruppe $Hol(E, \nabla)$, d.h. P ist eine Überlagerung von X und

$$E \cong P \times_{Hol(E, \nabla)} \mathbb{C}^r.$$

Durch Rückzug auf die universelle Überlagerung erhält man dann $E \cong E_\rho$. \square

Für spätere Verweise halten wir fest:

Bemerkung 1.10 — Seien $f : X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung und E ein flaches Bündel auf Y , das von einer Darstellung $\rho : \pi_1(Y) \rightarrow Gl_r(\mathbb{C})$ induziert wird. Dann ist auch f^*E flach und wird induziert durch die Komposition von ρ mit $f_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$.

Man überzeugt sich leicht, dass zwei flache Bündel genau dann isomorph sind, wenn die zugehörigen Darstellungen konjugiert sind.

Bemerkung 1.11 — Flache Bündel verhalten sich - genauso wie Bündel mit holomorphem Zusammenhang - gut unter allen Konstruktionen aus der Linearen Algebra, das heißt direkte Summe, Tensorprodukt, äußeres Produkt und duales Bündel von flachen Bündeln sind wieder flach.

1.3 Kurven und der Projektive Raum

Wir werden nun anfangen, die Relation zwischen den beiden Klassen von Vektorbündeln zu studieren.

Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Dann definieren wir:

$$\mathfrak{Fl}(X) := \{\text{holomorphe Vektorbündel, die einen flachen Zusammenhang besitzen}\}$$

$$\mathfrak{At}(X) := \{\text{holomorphe Vektorbündel } E \rightarrow X \text{ mit } A(E) = 0\}$$

Proposition 1.12 — *Es gilt $\mathfrak{Fl}(X) \subset \mathfrak{At}(X)$.*

Beweis. Sei $F \rightarrow X$ ein flaches Vektorbündel und $\tilde{X} \rightarrow X$ die universelle Überlagerung von X . Dann ist F von der Form $\tilde{X} \times_\rho \mathbb{C}^r$ für eine Darstellung $\rho : \pi_1(X) \rightarrow Gl_r(\mathbb{C})$. Der holomorphe Zusammenhang ∂ auf $\tilde{X} \times \mathbb{C}^r$ ist invariant unter der Wirkung von $\pi_1(X)$ und steigt somit ab zu einem holomorphen Zusammenhang auf F . \square

Wir wollen im weiteren die Frage untersuchen, ob auch die andere Inklusion gilt, mit anderen Worten, ob jedes Bündel mit einem holomorphen Zusammenhang auch eine flache Struktur besitzt.

Für Geradenbündel und Vektorbündel auf Kurven, lässt sich diese Frage leicht positiv beantworten.

Proposition 1.13 — *Sei L ein holomorphes Geradenbündel auf einer kompakten Kählermannigfaltigkeit mit $-2\pi ic_1(L) = A(L) = 0$. Dann ist L flach.*

Beweis. Auf einem Geradenbündel L auf einer Kählermannigfaltigkeit existiert immer eine Hermite-Einstein-Struktur. Die Krümmung des entsprechenden Chernzusammenhangs ∇ ist harmonisch. Da aber $[F_\nabla] = A(L) = 0$, verschwindet die Krümmung und der Zusammenhang ist flach. \square

Das gleiche Argument funktioniert natürlich immer, wenn ein Zusammenhang existiert, dessen Krümmung harmonisch ist.

Das folgende Ergebnis steht schon in [2].

Satz 1.14 — *Sei X eine komplexe, nicht notwendig kompakte Kurve. Dann ist $\mathfrak{A}t(X) = \mathfrak{F}l(X)$.*

Beweis. Sei E ein holomorphes Vektorbündel auf X und ∇ ein Zusammenhang, so dass $\nabla^{1,0}$ holomorph ist. Nach 1.7 ist dann

$$F_\nabla \in \Gamma(X, \Omega^2 \otimes \text{End}(E)) \subset \mathcal{A}^{2,0}(X, \text{End}(E)) = 0,$$

das heißt der Zusammenhang ist schon flach. \square

Korollar 1.15 — *Jedes holomorphe Vektorbündel auf \mathbb{P}^1 mit verschwindender Atiyah-Klasse ist trivial.*

Beweis. $\pi_1(\mathbb{P}^1) = 1$. \square

Nun erhalten wir für den projektiven Raum

Korollar 1.16 — *Für jedes n ist $\mathfrak{A}t(\mathbb{P}^n) = \mathfrak{F}l(\mathbb{P}^n) = \{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^m \mid m \in \mathbb{N}\}$.*

Beweis. Nach ([22], Theorem 3.2.1) ist ein Vektorbündel auf einem projektiven Raum genau dann trivial, wenn die Einschränkung auf alle Geraden, die durch einen festen Punkt gehen, trivial ist. Das vorangehende Korollar zeigt aber, dass für ein Vektorbündel aus $\mathfrak{A}t(\mathbb{P}^n)$ die Einschränkung auf jede Gerade trivial ist. Die andere Inklusion ist trivial. \square

Dieses Ergebnis folgt auch aus dem Resultat von I. Biswas (Theorem 3.4).

2 Existenz von holomorphen Zusammenhängen

Wie schon erwähnt, führte M. Atiyah in seinem Artikel *Complex analytic connections in fibre bundles* [2] die heutige Atiyah-Klasse ein. Nun wollen wir noch einige andere Ergebnisse des Artikels referieren.

Wir haben in Korollar 1.6 gesehen, dass alle Chernklassen eines Vektorbündels mit einem holomorphen Zusammenhang verschwinden. Die Existenz eines holomorphen Zusammenhangs ist jedoch eine wesentlich stärkere Forderung - zumindest in höheren Dimensionen.

2.1 Vektorbündel auf kompakten Kurven

Wir hatten in Satz 1.14 gesehen, dass auf Kurven die beiden Klassen $\mathfrak{F}(X)$ und $\mathfrak{A}(X)$ zusammenfallen.

Ein Vektorbündel heißt *unzerlegbar*, wenn es sich nicht als direkte Summe von Unterbündeln schreiben lässt. Dann gilt

Satz 2.1 (Satz von Weil) — *Ein unzerlegbares Vektorbündel E auf einer kompakten Kurve mit $\deg E = 0$ besitzt eine flache Struktur.*

Ein holomorphes Vektorbündel auf einer Kurve zerlegen wir in eine direkte Summe von unzerlegbaren Bündeln

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n.$$

Man kann nun zeigen, dass E genau dann flach ist, wenn jeder der Summanden flach ist. Also ist ein Vektorbündel E auf einer kompakten Kurve flach (oder äquivalent: E besitzt einen holomorphen Zusammenhang, vgl. Satz 1.14), wenn nur die Chernklassen der unzerlegbaren Summanden verschwinden.

2.2 Vektorbündel auf höherdimensionalen Varietäten

Ob zu einem Vektorbündel auf einer projektiven Mannigfaltigkeit X ein holomorpher Zusammenhang existiert, lässt sich auf einer geeigneten Fläche in X prüfen. Genauer gilt

Satz 2.2 (Proposition 21 in [2]) — *Seien X eine projektive Mannigfaltigkeit mit $\dim X \geq 3$, L ein amples Geradenbündel und E ein holomorphes Vektorbündel auf X . Dann gibt es ein n_0 , so dass für alle größeren n und alle glatten Hyperflächen S mit $\mathcal{O}_X(S) = L^n$ gilt: Die Atiyah-Klasse von E verschwindet genau dann, wenn die Atiyah-Klasse von $E|_S$ verschwindet.*

Durch Induktion erhalten wir sofort

Korollar 2.3 — *Sei X eine projektive Mannigfaltigkeit mit $\dim X \geq 3$ und E ein holomorphes Vektorbündel auf X . Dann gibt es einen vollständigen Durchschnitt $S \subset X$ von Dimension zwei, so dass*

$$A(E) = 0 \Leftrightarrow A(E|_S) = 0.$$

Beweis des Satzes. Wegen der Natürlichkeit der Atiyah-Klasse folgt aus $A(E) = 0$ immer $A(E|_S) = 0$. Es bleibt die andere Implikation zu zeigen.

Für ein Vektorbündel F bezeichnen wir wie üblich mit $F(n)$ das Bündel $F \otimes L^n$. Für eine glatte Hyperfläche S mit $[S] = \mathcal{O}(n)$ erhalten wir die Sequenz

$$0 \rightarrow F(-n) \rightarrow F \rightarrow F|_S \rightarrow 0. \quad (2)$$

Setzen wir $F = \Omega_X^1 \otimes \text{End}(E)$, ergibt sich

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \otimes \text{End}(E)(-n) \rightarrow \Omega_X^1 \otimes \text{End}(E) \rightarrow \Omega_X^1|_S \otimes \text{End}(E|_S) \rightarrow 0.$$

In der langen exakten Kohomologiesequenz haben wir dann

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^1(X, \Omega_X^1 \otimes \text{End}(E)(-n)) &\rightarrow H^{1,1}(X, \text{End}(E)) \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(S, \Omega_X^1|_S \otimes \text{End}(E|_S)) \rightarrow H^2(X, \Omega_X^1 \otimes \text{End}(E)(-n)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Nach dem Kodaira-Verschwindungssatz gibt es ein n_0 , so dass für $n \geq n_0$ und $i < 3 \leq \dim X$

$$H^i(X, \Omega_X^1 \otimes \text{End}(E)(-n)) = 0,$$

das heißt

$$H^{1,1}(X, \text{End}(E)) \cong H^1(S, \Omega_X^1|_S \otimes \text{End}(E|_S)). \quad (3)$$

Die Einbettung von S in X gibt uns die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_S \rightarrow \mathcal{T}_X|_S \rightarrow \mathcal{N}_{X/S} \cong \mathcal{O}_S(S) \rightarrow 0.$$

Durch Dualisieren und Tensorieren mit $\text{End}(E|_S)$ erhalten wir

$$0 \rightarrow \text{End}(E|_S)(-n) \rightarrow \Omega_X^1|_S \otimes \text{End}(E|_S) \rightarrow \Omega_S^1 \otimes \text{End}(E|_S) \rightarrow 0$$

und in der langen exakten Kohomologiesequenz

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^1(S, \text{End}(E|_S)(-n)) &\rightarrow \\ &\rightarrow H^1(S, \Omega_X^1|_S \otimes \text{End}(E|_S)) \xrightarrow{\phi} H^1(S, \Omega_S^1 \otimes \text{End}(E|_S)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Das Bild von $A(E)$ unter dem Isomorphismus aus (3) kombiniert mit ϕ ist genau die Einschränkung der Atiyah-Klasse $A(E|_S)$. Wenn wir n_0 nur so

groß wählen können, dass ϕ unabhängig von S immer injektiv ist, dann ist $A(E|_S)$ nur dann gleich Null, wenn schon $A(E) = 0$ war.

Die Sequenz (2) diesmal mit $F = \text{End}(E)(-n)$ lautet

$$0 \rightarrow \text{End}(E)(-2n) \rightarrow \text{End}(E)(-n) \rightarrow \text{End}(E|_S)(-n) \rightarrow 0.$$

Bereits um den Isomorphismus in (3) zu erhalten, haben wir n_0 so groß gewählt, dass $H^i(X, \Omega_X^1 \otimes \text{End}(E)(-n)) = 0$ für $i < 3$ und alle $n \geq n_0$. Angewendet auf die lange exakte Kohomologiesequenz der letzten Sequenz bedeutet das

$$H^1(S, \text{End}(E|_S)(-n)) = 0$$

Das heißt ϕ ist für $n \geq n_0$ injektiv, und die Behauptung folgt. \square

2.3 Ein Gegenbeispiel

Atiyah gibt nun noch ein Beispiel an, das zeigt, dass sowohl der Satz von Weil als auch Satz 2.2 sich nicht verallgemeinern lassen. Mit anderen Worten: Es reicht in Dimension größer eins nicht, dass alle Chernklassen eines unzerlegbaren Bündels verschwinden, um die Existenz eines holomorphen Zusammenhangs zu garantieren, und man kann die Existenz eines holomorphen Zusammenhangs nicht auf Kurven prüfen.

Seien dafür $Y = \mathbb{P}^1$, Z eine elliptische Kurve und $X = Y \times Z$. Wir fixieren $(y_0, z_0) \in X$ und betrachten $Y = Y \times \{z_0\}$ und $Z = \{y_0\} \times Z$ als Teilräume von X . Die Projektionen auf die Faktoren bezeichnen wir mit pr_Y und pr_Z . Das kanonische Bündel ist dann

$$K_X = \det(pr_Y^* K_Y \oplus pr_Z^* K_Z) = pr_Y^* K_Y = pr_Y^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) = \mathcal{O}_X(-2Z).$$

Wir tensorieren die Struktursequenz von Z mit $\mathcal{O}_X(2Z)$ und erhalten

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(Z) \rightarrow \mathcal{O}_X(2Z) \rightarrow \mathcal{O}_Z \otimes \mathcal{O}_X(2Z) \cong \mathcal{O}_Z \rightarrow 0,$$

denn $\mathcal{O}_Z(Z) \cong \mathcal{O}_Z$. Betrachten wir hierzu die lange exakte Kohomologiesequenz, so erhalten wir mit Serre-Dualität

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(2Z)) \xrightarrow{\phi} H^1(Z, \mathcal{O}_Z) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X(Z)) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X(-3Z))^* = 0.$$

Da Z eine elliptische Kurve ist, ist der Rang von $H^1(Z, \mathcal{O}_Z)$ eins, und wir können ein Element $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_X(2Z))$ wählen mit $\phi(\xi) = \eta \neq 0$. Die Elemente von $H^1(X, \mathcal{O}_X(2Z)) = H^1(X, \text{Hom}(\mathcal{O}_X(-Z), \mathcal{O}_X(Z)))$ entsprechen genau den Erweiterungen von $\mathcal{O}_X(-Z)$ durch $\mathcal{O}_X(Z)$. Wir betrachten nun die Erweiterung

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(Z) \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_X(-Z) \rightarrow 0 \quad (4)$$

zur Klasse ξ .

Proposition 2.4 — *Das Vektorbündel E erfüllt*

- (i) *Die totale Chernklasse ist trivial, i.e. $c(E)=1$.*
- (ii) *E ist unzerlegbar.*
- (iii) *E besitzt keinen holomorphen Zusammenhang.*

Beweis.

- (i) Die Chernklasse berechnet sich zu

$$\begin{aligned} c(E) &= c(\mathcal{O}_X(Z)) \cdot c(\mathcal{O}_X(-Z)) \\ &= 1 - c_1^2(\mathcal{O}_X(Z)) \\ &= 1 - c_1^2(pr_Y^* \mathcal{O}_Y(y_0)) \\ &= 1 - pr_Y^* c_1^2(\mathcal{O}_Y(y_0)) = 1. \end{aligned}$$

- (ii) Schränken wir die Sequenz (4) auf Z ein, so erhalten wir eine nicht triviale Erweiterung

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow E|_Z \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0,$$

die dem Element $\eta \neq 0$ in $H^1(Z, \mathcal{O}_Z)$ entspricht, das heißt $E|_Z$ ist unzerlegbar. Somit muss auch E schon unzerlegbar sein.

- (iii) Schränken wir (4) nun auf Y ein, so erhalten wir

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(y_0) \rightarrow E|_Y \rightarrow \mathcal{O}_Y(-y_0) \rightarrow 0.$$

Der Erweiterung entspricht eine Klasse in

$$H^1(Y, \mathcal{O}_Y(2y_0)) \cong H^0(Y, \mathcal{O}_Y(-4y_0))^* = 0,$$

das heißt die zur Erweiterung gehörende Klasse ist null und die Erweiterung trivial.

$$E|_Y \cong \mathcal{O}_Y(y_0) \oplus \mathcal{O}_Y(-y_0)$$

Damit ist $A(E|_Y) = A(\mathcal{O}_Y(y_0)) \oplus A(\mathcal{O}_Y(-y_0)) \neq 0$, und auch die Atiyah-Klasse von E kann nicht null sein. Also besitzt E keinen holomorphen Zusammenhang. \square

Hieraus ist sofort klar, dass der Satz von Weil in Dimension zwei nicht gilt, das heißt, das Verschwinden aller Chernklassen eines unzerlegbaren Bündels ist keine hinreichende Bedingung für die Existenz eines holomorphen Zusammenhangs.

Für den zweiten Aspekt des Beispiels benötigen wir ein weiteres Ergebnis aus [2]:

Proposition 2.5 — *Sei E eine unzerlegbares, holomorphes Vektorbündel auf X und $\dim X \geq 2$. Dann ist $E|_S$ unzerlegbar auf jeder Hyperfläche S von genügend hohem Grad.*

Ist also nun C eine Kurve genügend hohen Grades in X so ist $E|_C$ unzerlegbar und hat verschwindende Chernklassen. Mit anderen Worten $A(E|_C) = 0$ und $E|_C$ ist flach, während $A(E) \neq 0$.

Auch Satz 2.2 lässt sich also nicht verallgemeinern.

3 Das Resultat von I. Biswas

In diesem Abschnitt wollen wir das Ergebnis von I. Biswas [5] beweisen.

Hierfür werden wir nachweisen, dass unter gewissen Umständen ein Vektorbündel mit einem holomorphen Zusammenhang semistabil ist. Ein Resultat von C. Simpson ([24] Corollary 3.10, S. 40) besagt, dass ein semistabiles Bündel mit verschwindenden Chernklassen tatsächlich ein flaches Bündel ist, und liefert das gewünschte Ergebnis.

Zunächst werden wir also den Begriff der Semistabilität klären. Unsere Referenz hierfür ist das Buch von Kobayashi ([17], Chapter V).

Wir fixieren auf einer Kählermannigfaltigkeit X eine Kählerform ω . Für projektives X nehmen wir stets an, dass ω von einem amplem Geradenbündel induziert wird. Für ein Vektorbündel E auf X ist der Grad (bezüglich ω) definiert als

$$\deg E = \int_X c_1(E) \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega.$$

Um den Begriff für torsionsfreie, kohärente Garben zu verallgemeinern, betrachten wir zu einer solchen Garbe \mathcal{F} vom Rang r die Garbe

$$\det \mathcal{F} = (\Lambda^r \mathcal{F})^{**}.$$

Die Garbe $\det \mathcal{F}$ ist tatsächlich ein Geradenbündel, und wir können $c_1(\mathcal{F}) = c_1(\det \mathcal{F})$ definieren.

Für Vektorbündel gibt diese Konstruktion wieder die gewöhnliche Determinante. Hat man eine kurze, exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0,$$

so gilt wie im Fall von Vektorbündeln $\det \mathcal{F} = \det \mathcal{F}' \otimes \det \mathcal{F}''$, das heißt

$$\deg \mathcal{F} = \deg \mathcal{F}' + \deg \mathcal{F}''.$$

Wir nennen

$$\mu(\mathcal{F}) = \frac{\deg \mathcal{F}}{\operatorname{rk} \mathcal{F}}$$

den *Anstieg* von \mathcal{F} . Die obige Sequenz gibt dann

$$\mu(\mathcal{F}) = \frac{1}{\operatorname{rk} \mathcal{F}} (\operatorname{rk} \mathcal{F}' \mu(\mathcal{F}') + \operatorname{rk} \mathcal{F}'' \mu(\mathcal{F}''))$$

und für $\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{F}')$

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{F}'') &= \frac{1}{\operatorname{rk} \mathcal{F}''} (\operatorname{rk} \mathcal{F} \mu(\mathcal{F}) - \operatorname{rk} \mathcal{F}' \mu(\mathcal{F}')) \\ &< \frac{\operatorname{rk} \mathcal{F} - \operatorname{rk} \mathcal{F}'}{\operatorname{rk} \mathcal{F}''} \mu(\mathcal{F}) \\ &= \mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{F}') \end{aligned} \tag{5}$$

Weiterhin gilt $\mu(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) = \mu(\mathcal{F}) + \mu(\mathcal{G})$.

Definition 3.1 — Eine torsionsfreie, kohärente Garbe \mathcal{F} auf X heißt *semistabil* bzw. *stabil*, wenn für jede Untergarbe \mathcal{F}' mit torsionsfreiem Quotienten \mathcal{F}/\mathcal{F}' gilt: $\mu(\mathcal{F}') \leq \mu(\mathcal{F})$ bzw. $\mu(\mathcal{F}') < \mu(\mathcal{F})$.

Im folgenden werden wir unter einer Untergarbe immer eine Untergarbe mit torsionsfreiem Quotienten verstehen. Die obigen Überlegungen zeigen, dass eine äquivalente Bedingung für die Semistabilität $\mu(\mathcal{F}'') \geq \mu(\mathcal{F})$ für alle torsionsfreien Quotienten \mathcal{F}'' ist.

Der Beweis der folgenden Propositionen findet sich in [17], Kapitel V.7.

Proposition 3.2 — Eine kohärente Garbe \mathcal{F} ist genau dann semistabil, wenn die duale Garbe \mathcal{F}^* semistabil ist. Es gilt dann $\mu(\mathcal{F}^*) = -\mu(\mathcal{F})$.

Proposition 3.3 — Sei \mathcal{F} eine torsionsfreie, kohärente Garbe auf X . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Untergarbe \mathcal{F}_1 , so dass für alle Untergarben $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ gilt:

- (i) $\mu(\mathcal{F}') \leq \mu(\mathcal{F}_1)$,
- (ii) $\text{rk } \mathcal{F}' \leq \text{rk } \mathcal{F}_1$ falls $\mu(\mathcal{F}') = \mu(\mathcal{F}_1)$.

\mathcal{F}_1 ist dann semistabil und heißt *maximale semistabile Untergarbe* von \mathcal{F} .

Hieraus erhalten wir nun zu \mathcal{F} die *Harder-Narasimhan-Filtrierung*

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_l \subset \mathcal{F}_{l+1} = \mathcal{F},$$

die eindeutig dadurch bestimmt ist, dass $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$ die maximale semistabile Untergarbe von $\mathcal{F}/\mathcal{F}_{i-1}$ ist. Es ist klar, dass $\mu(\mathcal{F}_i)$ größer als $\mu(\mathcal{F}_{i+1})$ ist.

Betrachten wir nun die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} \rightarrow \mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_{i-1} \rightarrow \mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i \rightarrow 0$$

so folgt mit (5)

$$\mu(\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i) < \mu(\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}). \quad (6)$$

Nun können wir das Resultat von I. Biswas formulieren. Sei dafür X eine projektive Mannigfaltigkeit. Wir fixieren eine Polarisierung, i.e. ein amples Geradenbündel. Sei dann

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_l \subset V_{l+1} = \mathcal{T}_X$$

die Harder-Narasimhan-Filtrierung des Tangentialbündels von X bezüglich der Polarisierung.

Theorem 3.4 (Biswas) — Sei X eine projektive Mannigfaltigkeit mit $\text{deg } \mathcal{T}_X \geq 0$. Sei E ein Vektorbündel auf X , dessen Atiyah-Klasse verschwindet.

- (i) Falls $\deg \mathcal{T}_X/V_l \geq 0$ ist, so besitzt E eine flache Struktur. (Diese Bedingung ist unter anderem erfüllt, wenn \mathcal{T}_X semistabil ist.)
- (ii) Sei nun \mathcal{T}_X nicht semistabil und das maximale semistabile Unterbündel V_1 lokal frei. Ist dann der Rang der Neron-Severi Gruppe eins, i.e.

$$H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q},$$

dann besitzt E eine flache Struktur.

Hat eine projektive Mannigfaltigkeit triviales kanonisches Bündel, so besagt ein Ergebnis von Yau [27], dass das Tangentialbündel semistabil ist. Mit dem ersten Teil des Theorems erhalten wir:

Korollar 3.5 — *Ist X eine projektive Mannigfaltigkeit mit trivialem kanonischem Bündel, so ist jedes Vektorbündel mit verschwindender Atiyah-Klasse flach.*

Dieses Korollar werden wir in Abschnitt 5 auf projektive Flächen anwenden.

Beweis des Theorems. Wie eingangs gesagt, reicht es nachzuweisen, dass E unter den jeweils gegebenen Voraussetzungen semistabil ist, um mit dem Resultat von Simpson die Existenz einer flachen Struktur zu folgern.

Hierfür werden wir die maximale semistabile Untergarbe $W \subset E$ betrachten und nachweisen, dass $\mu(W) = 0$. Da alle Chernklassen von E verschwinden (Korollar 1.6), ist auch $\mu(E) = 0$ und somit $W = E$ und E semistabil.

Sei also nun $\deg \mathcal{T}_X/V_l \geq 0$. Wir wählen einen holomorphen Zusammenhang D auf E und betrachten die Garbenabbildung $\mathcal{T}_X \otimes_{\mathbb{C}} W \rightarrow E/W$, die einen lokalen Schnitt $\xi \otimes s$ auf die Projektion von $D_\xi s$ nach E/W abbildet. Für eine lokale holomorphe Funktion f gilt die Leibnizbedingung $D_\xi(fs) = \partial_\xi f \otimes s + f D_\xi s$. Weil $\partial_\xi f \otimes s$ in W liegt und somit auf Null abgebildet wird, ist die Abbildung sogar \mathcal{O}_X -linear und induziert eine Abbildung von \mathcal{O}_X -Garben

$$\bar{D} : \mathcal{T}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} W \rightarrow E/W.$$

Nun benötigen wir folgendes

Lemma 3.6 — *Die Bedingungen $\mu(\mathcal{T}_X) \geq 0$ und $\mu(\mathcal{T}_X/V_l) \geq 0$ garantieren, dass der Anstieg jedes torsionsfreien Quotienten von \mathcal{T}_X nicht negativ ist.*

Beweis. Die Eigenschaft (6) der Harder-Narasimhan-Filtrierung impliziert $0 \leq \mu(\mathcal{T}_X/V_l) \leq \mu(V_i/V_{i-1})$. Durch Induktion erhalten wir wie bei (5) aus der Sequenz

$$0 \rightarrow V_i/V_{i-1} \rightarrow \mathcal{T}_X/V_{i-1} \rightarrow \mathcal{T}_X/V_i \rightarrow 0$$

$\mu(\mathcal{T}_X/V_i) \geq 0$. Sei nun $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}_X$ eine Untergarbe. Wir beweisen durch Induktion über i

$$\mathcal{F} \subset V_i \Rightarrow \mu(V_i/\mathcal{F}) \geq 0.$$

Für $i = 1$ gilt dies, weil V_1 semistabil ist und $\mu(V_1) \geq 0$. Für den Induktionsschritt sei nun $\mathcal{F} \subset V_i$, und wir erhalten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \ker \phi & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \operatorname{im} \phi \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & \searrow \phi & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & V_{i-1} & \longrightarrow & V_i & \longrightarrow & V_i/V_{i-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & V_{i-1}/\ker \phi & \longrightarrow & V_i/\mathcal{F} & \longrightarrow & (V_i/V_{i-1})/\operatorname{im} \phi \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Man überlegt sich leicht, dass die Quotienten jeweils torsionsfrei sind. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\mu(V_{i-1}/\ker \phi) \geq 0$, und weil V_i/V_{i-1} semistabil ist, ist $\mu((V_i/V_{i-1})/\operatorname{im} \phi) \geq 0$. Also hat auch V_i/\mathcal{F} nicht negativen Anstieg. \square

Weil das Tensorprodukt von semistabilen Garben wieder semistabil ist ([19], Corollary 2.6.1), sieht man auf die gleiche Weise, dass das Tensorprodukt der Harder-Narasimhan-Filtrierung von \mathcal{T}_X mit W die Harder-Narasimhan-Filtrierung von $\mathcal{T}_X \otimes W$ ist. Also ist der Anstieg jedes torsionsfreien Quotienten von $\mathcal{T}_X \otimes W$ mindestens $\mu(W)$. Andererseits ist der Anstieg jeder nicht trivialen Untergarbe von E/W echt kleiner als $\mu(W)$, denn die maximale semistabile Untergarbe von E/W hat nach (6) echt kleineren Anstieg als W . Wenden wir beides auf das Bild von \bar{D} an, impliziert dies $\bar{D} = 0$.

Das bedeutet D bildet W nach $\Omega_X^1 \otimes W$ ab und induziert einen holomorphen Zusammenhang auf W (im Sinne von Bemerkung 1.2) und damit auf $\det W$. Dann haben wir

$$\deg W = \deg(\det W) = 0,$$

denn $\det W$ ist ein Geradenbündel mit verschwindender Atiyah-Klasse. Wie gewünscht ist also $\mu(W) = 0$, $E = W$ und also E semistabil. Dies liefert die Behauptung.

Bemerkung 3.7 — Biswas zeigt, dass jede kohärente Garbe W mit einem holomorphen Zusammenhang auch schon lokal frei ist, um dann $\mu(W) = 0$

zu folgern. Weil das Ergebnis an sich interessant ist, werden wir es in Anhang A.1 noch beweisen.

Für den zweiten Teil des Theorems sei \mathcal{T}_X nicht semistabil aber die maximale semistabile Untergarbe V_1 lokal frei. Sei wie oben D ein holomorpher Zusammenhang in E und W das maximale semistabile Unterbündel.

Der Beweis verläuft in mehreren Schritten. Wieder wollen wir zeigen, dass E semistabil ist. Wir wollen die Annahme, dass W eine echte Untergarbe ist, zum Widerspruch führen.

Zunächst zeigen wir, dass V_1 eine nicht singuläre holomorphe Blätterung ist. Dann induziert D einen partiellen Zusammenhang im Sinne von Bott [8] auf dem Bündel $\det W$. Spezielle Eigenschaften von dessen Krümmung werden $c_1(W)^q = 0$ ergeben, woraus mit den Bedingungen an die Neron-Severi Gruppe $c_1(W) = 0$ folgt. Dies impliziert wie im ersten Teil die Behauptung.

Um zu zeigen, dass V_1 eine holomorphe Blätterung ist, müssen wir nachweisen, dass V_1 involutiv, i.e. abgeschlossen unter der Lieklammer ist. Die Lieklammer erfüllt die Identität

$$[fv, gw] = fg[v, w] + fv(g)w - gw(f)v$$

für Tangentialvektoren v, w und Funktionen f, g . Damit ist die Abbildung

$$\Gamma : V_1 \otimes V_1 \rightarrow \mathcal{T}_X/V_1$$

\mathcal{O}_X -linear. Das Bündel $V_1 \otimes V_1$ ist semistabil und $\mu(V_1 \otimes V_1) = 2\mu(V_1) > \mu(V_1) > 0$, das heißt jeder Quotient hat echt größeren Anstieg als V_1 . Andererseits ist V_2/V_1 das maximale semistabile Unterbündel von \mathcal{T}_X/V_1 und $\mu(V_2/V_1) < \mu(V_1)$, so dass jede Untergarbe von \mathcal{T}_X/V_1 echt kleineren Anstieg als V_1 hat. Angewendet auf das Bild von γ impliziert dies $\Gamma = 0$ und V_1 ist involutiv.

Wir möchten nun einen partiellen holomorphen Zusammenhang auf W entlang V_1 konstruieren, genauer eine Abbildung

$$D' : W \rightarrow V_1^* \otimes W,$$

die die Leibnizregel $D'(fs) = pr_{V_1^*} \partial f \otimes s + fD's$ erfüllt. Der holomorphe Zusammenhang D induziert durch Projektion auf V_1^* einen Operator

$$D_1 : W \rightarrow V_1^* \otimes E$$

und schließlich einen Operator

$$D_2 : W \rightarrow V_1^* \otimes E/W.$$

Können wir $D_2 = 0$ zeigen, so ist das Bild von D_1 enthalten in $V_1^* \otimes W$ und wir setzen $D' = D_1$. Wir bedienen uns hierfür der gleichen Technik wie zuvor.

Das maximale semistabile Unterbündel von E/W hat echt kleineren Anstieg als W . Nach Proposition 3.2 ist V_1^* semistabil mit negativem Anstieg $-\mu(V_1)$, womit das maximale semistabile Unterbündel von $V_1^* \otimes E/W$ - und damit jedes Unterbündel - auch echt kleineren Anstieg als W hat. Andererseits ist W semistabil, und jeder torsionsfreie Quotient von W hat einen größeren Anstieg als W . Also ist D_2 die Nullabbildung, und wir erhalten den gesuchten partiellen Zusammenhang D' .

Wie im ersten Teil betrachten wir nun das Determinantenbündel $\det W$, um den Grad von W zu berechnen. D' induziert einen partiellen Zusammenhang auf $\det W$, den wir wieder mit D' bezeichnen.

Den Methoden von [8] folgend, erweitern wir D' zu einem Zusammenhang auf $\det W$:

Wir fixieren eine Kählermetrik g auf X und wählen eine hermitesche Struktur mit zugehörigem Chernzusammenhang ∇' auf $\det W$. Dessen $(0,1)$ -Anteil ist $\bar{\partial} = \bar{\partial}_{\det W}$. Einen Tangentialvektor $v \in T^{1,0}X$ zerlegen wir in $v_1 \oplus v_2$ gemäß der Aufspaltung $T^{1,0}X = V_1 \oplus V_1^\perp$ mittels g . Für $v' \in T^{0,1}X$ und einen glatten Schnitt s in $\det W$ definieren wir dann

$$\nabla_{v \oplus v'} s = D'_{v_1} s + \nabla'_{v_2} s + \bar{\partial}_{v'} s.$$

Der Operator ∇ ist ein gewöhnlicher Zusammenhang auf $\det W$, der mit der holomorphen Struktur verträglich ist.

Der $(1,1)$ -Anteil der Krümmung F_∇ ist ein Repräsentant der ersten Chernklasse des Geradenbündels $\det W$. Ist nämlich $\tilde{\nabla}$ ein verträglicher, hermitescher Zusammenhang, so ist $\nabla = \tilde{\nabla} + a$ für eine $(1,0)$ -Form a , da beide Zusammenhänge mit der holomorphen Struktur verträglich sind. Die Krümmung berechnet sich zu

$$\begin{aligned} F_\nabla &= F_{\tilde{\nabla}} + \tilde{\nabla}a + a \wedge a \\ &= \underbrace{F_{\tilde{\nabla}} + \bar{\partial}a}_{(1,1)} + \underbrace{\tilde{\nabla}^{1,0}a + a \wedge a}_{(2,0)}, \end{aligned}$$

so dass $c_1(\det(W)) = [F_{\tilde{\nabla}}] = [F_\nabla^{1,1}]$ in $H^{1,1}(X)$. Wir benötigen nun das folgende

Lemma 3.8 — Sei $\mathcal{I} \subset T^*X$ das von $\text{Ann}(V_1)$, dem Annulator von V_1 in $T^{1,0}X$, erzeugte Differentialideal. Dann ist der $(1,1)$ -Anteil von $F_\nabla^{1,1}$ in Wirklichkeit ein Schnitt in \mathcal{I} , das heißt $F_\nabla^{1,1} \in \mathcal{A}^0(X, \text{Ann}(V_1) \otimes \Lambda^{0,1}X)$.*

Beweis. Da V_1 involutiv ist, ist \mathcal{I} ein Differentialideal (vgl. [26], Proposition 2.30). Dass die Krümmung tatsächlich darin liegt, zeigen wir mit einer lokalen Rechnung. Wir schreiben

$$D' = \partial + A \text{ und } \nabla' = d + B$$

*I. Biswas führt in seinem Artikel die gleiche Argumentation mit \bar{V}_1 durch. Dieser Ansatz scheint jedoch nicht korrekt zu sein.

für ein $A \in H^1(X, \Omega_X^1)$ und eine $(1,0)$ -Form B . Bezeichnet pr jeweils die Projektion auf den entsprechenden Teilraum, ist für einen glatten Schnitt s von $\det W$

$$\begin{aligned} \nabla s &= ((\partial + A)s) \circ pr_{V_1} + ((d + B)s) \circ pr_{V_1^\perp} + (\bar{\partial}s) \circ pr_{T^{0,1}X} \\ &= ds + (pr_{V_1^*}A + pr_{V_1^{\perp*}}B)s, \end{aligned}$$

und der $(1,1)$ -Anteil der Krümmung ist

$$\begin{aligned} F_{\nabla}^{1,1} &= \left((pr_{V_1^*}A + pr_{V_1^{\perp*}}B) \wedge (pr_{V_1^*}A + pr_{V_1^{\perp*}}B) + d(pr_{V_1^*}A + pr_{V_1^{\perp*}}B) \right)^{1,1} \\ &= \bar{\partial}(pr_{V_1^*}A + pr_{V_1^{\perp*}}B) \\ &= 0 + \bar{\partial}pr_{V_1^{\perp*}}B. \end{aligned}$$

Dies liegt in \mathcal{I} , da \mathcal{I} ein Differentialideal ist. \square

Hieraus können wir folgern, dass genügend hohe Potenzen der ersten Chernklasse verschwinden. Ist q größer als die Dimension des Annulators $\dim X - \dim V_1$, so ist

$$\Lambda^q(\text{Ann}(V_1) \otimes \Lambda^{0,1}X) = \Lambda^q \text{Ann}(V_1) \otimes \Lambda^{0,q}X = 0$$

und somit auch $(F_{\nabla}^{1,1})^q = 0$. Das bedeutet

$$c_1(W)^q = c_1(\det W)^q = 0.$$

Um den Beweis abzuschließen, müssen wir nur noch bemerken, dass die Forderung, dass der Rang der Neron-Severi Gruppe eins ist, besagt, dass $c_1(W) = m[\omega]$ ein ganzzahliges Vielfaches der Kählerklasse, i.e. der Chernklasse des amplen Geradenbündels, ist. Die Klasse $[\omega]^q$ ist jedoch nicht null für $q \leq \dim X$, so dass $m = 0$ und also auch $c_1(W) = 0$ sein müssen. Also ist $\mu(W) = \mu(E) = 0$.

Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass das maximale semistabile Unterbündel W ein echtes Unterbündel von E ist, denn dann müsste W echt größeren Anstieg als E haben.

Also ist E semistabil und eine weitere Anwendung des Resultates von Simpson schließt den Beweis von Theorem 3.4 ab. \square

4 Eigene Ergebnisse

In diesem Abschnitt möchten wir die erzielten Ergebnisse darstellen. Zu einer Mannigfaltigkeit X hatten wir die beiden Klassen $\mathfrak{A}t(X)$, Vektorbündel mit verschwindender Atiyah-Klasse, und $\mathfrak{F}l(X)$, flache Vektorbündel, eingeführt. Wir wollen nun das Verhalten dieser Klassen unter gewissen Morphismen studieren. So können wir aus Mannigfaltigkeiten, auf denen beide Klassen übereinstimmen, neue Beispiele gewinnen, auf welchen dies auch gilt.

Zunächst wollen wir zeigen, dass es für projektive Mannigfaltigkeiten reicht, Flächen zu betrachten.

4.1 Reduktion auf Flächen

Sei E ein Vektorbündel mit holomorphem Zusammenhang auf einer projektiven Mannigfaltigkeit von Dimension mindestens drei. In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass wir auf gewissen Flächen in X testen können, ob E flach ist. Dafür bedienen wir uns einer ähnlichen Technik wie in Satz 2.2.

Satz 4.1 — *Falls $\mathfrak{F}l(X)$ und $\mathfrak{A}t(X)$ für alle kompakten projektiven Flächen übereinstimmen, so stimmen sie auf allen kompakten projektiven Mannigfaltigkeiten überein.*

Im Beweis werden wir die Fundamentalgruppen von geeigneten Hyperebenenanschnitten kontrollieren müssen. Die Lefschetzsätze in der Version für Homotopiegruppen (frei nach [7], Korollar nach Theorem I) liefern die benötigten Informationen:

Satz 4.2 (Satz von Lefschetz) — *Sei X eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n und S eine glatter, ample Divisor. Die von der Inklusion $i_S : S \hookrightarrow X$ induzierte Abbildung der Homotopiegruppen*

$$i_{S*} : \pi_i(S) \rightarrow \pi_i(X)$$

ist dann ein Isomorphismus für $i < n - 1$ und surjektiv für $i = n - 1$.

Insbesondere ist

$$i_{S*} : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(X) \tag{7}$$

ein Isomorphismus für $n \geq 3$ und surjektiv für $n = 2$.

Beweis des Satzes. Induktion über $\dim X = n$. Gelte also die Annahme auf allen kompakten, projektiven Mannigfaltigkeiten der Dimension $n - 1 \geq 2$. Sei $E \rightarrow X$ ein Vektorbündel mit verschwindender Atiyah-Klasse und L ein positives Geradenbündel auf X .

Wir wählen einen glatten, ample Divisor S mit $\mathcal{O}(S) = \mathcal{O}(m) = L^m$. Hier benutzen wir den Satz von Bertini (vgl. z.B. [13]). Die Atiyah-Klasse

von $E|_S$ ist Null, und somit gibt es nach Voraussetzung eine Darstellung der Fundamentalgruppe

$$\rho : \pi_1(S) \cong \pi_1(X) \rightarrow Gl_r(\mathbb{C}),$$

so dass das hierzu assoziierte Vektorbündel $E_\rho \rightarrow X$ auf S eingeschränkt isomorph zu $E|_S$ ist. Der Isomorphismus der Fundamentalgruppen wird hier durch die Inklusion $i_S : S \rightarrow X$ induziert (vgl. (7)).

Wir wollen nun zunächst zeigen, dass E_ρ bis auf Isomorphie unabhängig von der Wahl von S ist. Betrachten wir dazu einen weiteren glatten, amplen Divisor S' nicht notwendig vom gleichen Grad wie S , so erhalten wir analog eine Darstellung

$$\rho' : \pi_1(S') \cong \pi_1(X) \rightarrow Gl_r(\mathbb{C}).$$

Nach dem Nakai-Moishezon Kriterium für ample Divisoren ([13], Appendix A, Theorem 5.1) ist der Schnitt von S und S' nicht leer und wir können $S \cap S'$ als glatt annehmen, indem wir S' gegebenenfalls durch einen linear äquivalenten, glatten Divisor ersetzen. Die Einschränkung der Bündel E_ρ und $E_{\rho'}$ entspricht der Komposition der Darstellungen mit $i_{S \cap S'}$:

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(S) & \\
 i_{S \cap S'}^* \nearrow & & \searrow \rho \\
 \pi_1(S \cap S') & \xrightarrow{\rho \circ i_{S \cap S'}^*} & Gl_r(\mathbb{C}) \xrightarrow{\text{int}_g} Gl_r(\mathbb{C}) \\
 i_{S \cap S'}^* \searrow & \xrightarrow{\rho' \circ i_{S \cap S'}^*} & \nearrow \rho' \\
 & \pi_1(S') &
 \end{array}$$

Die eingeschränkten Bündel sind isomorph

$$E_\rho|_{S \cap S'} \cong E|_{S \cap S'} \cong E_{\rho'}|_{S \cap S'},$$

und somit sind die entsprechenden Darstellungen konjugiert unter einem inneren Automorphismus int_g (Bemerkung 1.10). Weil aber S mindestens Dimension zwei hat, ist $i_{S \cap S'}^*$ nach (7) surjektiv. Also sind auch ρ und ρ' konjugiert und $E_\rho \cong E_{\rho'}$, mit anderen Worten: E_ρ ist unabhängig von der Wahl des Divisors S .

Wir wollen nun zeigen, dass der Isomorphismus $E|_S \cong E_\rho|_S$ für genügend großen Grad m des amplen Divisors zu einem Isomorphismus $E \cong E_\rho$ liftet. Dafür betrachten wir die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-m) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow 0$$

und erhalten nach tensorieren mit $\text{Hom}(E, E_\rho)$ die lange exakte Kohomologiesequenz

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow H^0(X, \text{Hom}(E, E_\rho)(-m)) &\rightarrow H^0(X, \text{Hom}(E, E_\rho)) \rightarrow \\
 &\rightarrow H^0(X, \text{Hom}(E|_S, E_\rho|_S)) \rightarrow H^1(X, \text{Hom}(E, E_\rho)(-m)) \rightarrow \dots \quad (8)
 \end{aligned}$$

Der Kodaira-Verschwindungssatz garantiert die Existenz eines m , so dass

$$H^q(X, \text{Hom}(E, E_\rho)^* \otimes K_X^* \otimes L^m) = 0 \text{ f\u00fcr } q > 0.$$

Nach Serre-Dualit\u00e4t ist also $H^q(X, \text{Hom}(E, E_\rho)(-m))^* = 0$ f\u00fcr $q < n$, und wir haben in (8) einen Isomorphismus

$$H^0(X, \text{Hom}(E, E_\rho)) \cong H^0(X, \text{Hom}(E|_S, E_\rho|_S)).$$

Somit liftet der Isomorphismus $E|_S \cong E_\rho|_S$ zu einem Homomorphismus $\phi : E \rightarrow E_\rho$. Der Homomorphismus ϕ ist nun genau dann ein Isomorphismus, wenn der induzierte Schnitt $\det \phi \in H^0(X, \det(\text{Hom}(E, E_\rho)))$ nirgendwo verschwindet.

Ist dies nicht der Fall, erhalten wir einen Nullstellendivisor $D = Z(\det \phi)$ und da S ample ist, ist der Schnitt von D und S nicht leer nach dem Nakai-Moishezon Kriterium. Eingeschr\u00e4nkt auf S ist ϕ jedoch ein Isomorphismus und somit $\det \phi \neq 0$ \u00fberall. Also ist ϕ \u00fberall ein Isomorphismus. \square

Der Beweis des Satzes liefert genauer:

Korollar 4.3 — *Seien X eine projektive Mannigfaltigkeit von Dimension mindestens drei und E ein Vektorb\u00fcndel auf X . Dann gibt es einen vollst\u00e4ndigen Durchschnitt S der Dimension zwei, so dass E genau dann flach ist, wenn $E|_S$ flach ist.*

4.2 Aufblasungen und birationale Morphismen

Sei X eine komplexe, kompakte und projektive Mannigfaltigkeit und Y eine glatte, abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Mit $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ bezeichnen wir die Aufblasung von X entlang Y . Bekanntlich identifiziert sich $\pi^{-1}(Y)$ mit $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{Y/X})$, dem projektivierten Normalenb\u00fcndel von Y in X .

Die induzierte Abbildung $\pi_* : \pi_1(\tilde{X}) \rightarrow \pi_1(X)$ ist ein Isomorphismus. Daf\u00fcr betrachten wir eine Tubenumgebung T von Y bez\u00fcglich einer Metrik auf X und zerlegen $X = T \cup X \setminus Y$ und $\tilde{X} = \pi^{-1}T \cup \tilde{X} \setminus \pi^{-1}Y$. Wegen dem Satzes von Seifert-van Kampen reicht es die Fundamentalgruppen von T und $\pi^{-1}T$ zu vergleichen beziehungsweise die Fundamentalgruppen der jeweiligen Deformationsretrakte Y und $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{Y/X})$, denn au\u00dfenhalb ist π biholomorph. Der Isomorphismus ergibt sich nun aus der Homotopiesequenz der Faserung (vgl. [9], Chapter VII Theorem 6.7).

Somit gibt es eine nat\u00fcrliche Bijektion zwischen Darstellungen der Fundamentalgruppe von X und \tilde{X} . F\u00fcr die assoziierten flachen B\u00fcndel entspricht das dem R\u00fcckzug mit π^* .

Wir wollen nun zeigen, dass sich B\u00fcndel mit einem holomorphen Zusammenhang \u00e4hnlich verhalten.

Satz 4.4 — *Die Abbildung π^* induziert Isomorphismen zwischen $\mathfrak{F}l(X)$ und $\mathfrak{F}l(\tilde{X})$ sowie $\mathfrak{A}t(X)$ und $\mathfrak{A}t(\tilde{X})$.*

Beweis. Es ist nur noch der zweite Teil des Satzes zu beweisen.

Allgemein haben wir $\pi^* : \mathfrak{A}t(X) \rightarrow \mathfrak{A}t(\tilde{X})$, und die Abbildung ist hier injektiv, da π eine Aufblasung ist, i.e. biholomorph außerhalb einer Teilmenge von Kodimension zwei von X . Wir müssen nun die Surjektivität zeigen.

Sei also \tilde{E} ein holomorphes Bündel vom Rang r auf \tilde{X} mit holomorphem Zusammenhang \tilde{D} . Hinreichende und notwendige Bedingung für die Existenz eines Bündels E auf X , so dass $\pi^*E = \tilde{E}$, ist nach einem Satz von Ishimura ([15], Theorem 1) $\tilde{E}|_{\pi^{-1}(y)} \cong \pi^{-1}(y) \times \mathbb{C}^r$ für jeden Punkt $y \in Y$. Jede Einschränkung erbt aber den holomorphen Zusammenhang von \tilde{E} und ist somit nach Korollar 1.16 trivial. Also ist $E = \pi_*\tilde{E}$ lokal frei auf X und $\pi^*E \cong \tilde{E}$.

Nun müssen wir noch den holomorphen Zusammenhang auf E konstruieren.

$$\pi|_{\tilde{X} \setminus \pi^{-1}(Y)} : \tilde{X} \setminus \pi^{-1}(Y) \rightarrow X \setminus Y$$

ist eine biholomorphe Abbildung und induziert einen Isomorphismus

$$\tilde{E}|_{\tilde{X} \setminus \pi^{-1}(Y)} \cong E|_{X \setminus Y}$$

und somit einen holomorphen Zusammenhang D auf $E|_{X \setminus Y}$. Die Kodimension von Y muss mindestens 2 sein, um eine nicht triviale Aufblasung zu ergeben. Das bedeutet, wir können den Zusammenhang nach Hartogs Theorem über Y hinweg als holomorphen Zusammenhang fortsetzen, indem wir lokal $D = \partial + A$ schreiben und die Matrix von holomorphen 1-Formen eindeutig über Y hinweg fortsetzen. Wir erhalten so einen holomorphen Zusammenhang auf E und $E \in \mathfrak{A}t(X)$. \square

Das starke Ergebnis von Abramovich, Karu, Matsuki und Włodarczyk zur Faktorisierung von birationalen Morphismen gibt uns nun die Möglichkeit, das Ergebnis auf birationale Abbildungen auszudehnen. Genauer gilt:

Weak Factorization ([1], Theorem 0.1.1) — *Sei $X_1 \dashrightarrow X_2$ eine birationale Abbildung zwischen vollständigen, nicht singulären algebraischen Varietäten X_1 und X_2 über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik Null und sei $U \subset X_1$ eine offene Menge, auf der ϕ ein Isomorphismus ist. Dann kann ϕ in eine Sequenz von Aufblasungen und Herunterblasungen entlang glatter Untermannigfaltigkeiten, die im Komplement von U liegen, faktorisiert werden. Das bedeutet: Es gibt eine Folge von birationalen Abbildungen*

$$X_1 = V_0 \xrightarrow{\phi_1} V_1 \xrightarrow{\phi_2} \cdots \xrightarrow{\phi_{l-1}} V_{l-1} \xrightarrow{\phi_l} V_l = X_2 ,$$

so dass

$$(i) \quad \phi = \phi_l \circ \phi_{l-1} \circ \cdots \circ \phi_1$$

- (ii) ϕ_i ist ein Isomorphismus auf U für alle i .
- (iii) Entweder $\phi_i : V_{i-1} \dashrightarrow V_i$, oder $\phi_i^{-1} : V_i \dashrightarrow V_{i-1}$ ist ein Morphismus, der durch das Aufblasen entlang einer glatten Untermannigfaltigkeit, die nicht in U liegt, entsteht.

Weiterhin sind alle V_i projektiv, wenn X_1 und X_2 projektiv sind.

Damit erhalten wir sofort den folgenden

Satz 4.5 — *Es gilt:*

- (i) Sei $\phi : X \rightarrow X'$ eine birationale Abbildung zwischen projektiven, komplexen Mannigfaltigkeiten. Dann existieren Bijektionen $\mathfrak{I}(X') \rightarrow \mathfrak{I}(X)$ und $\mathfrak{A}(X') \rightarrow \mathfrak{A}(X)$ induziert durch ϕ .
- (ii) Falls für eine komplexe, projektive Mannigfaltigkeit $\mathfrak{I}(X) = \mathfrak{A}(X)$ gilt, so gilt dies für alle projektiven Mannigfaltigkeiten, die birational äquivalent zu X sind.

4.3 Reguläre, endliche Überlagerungen

Es sei X eine nicht notwendig kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit und $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ eine endliche, reguläre Überlagerung. Das heißt wir haben eine exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \pi_1(\tilde{X}) \rightarrow \pi_1(X) \rightarrow G \rightarrow 1,$$

G operiert einfach transitiv auf den Fasern und $\tilde{X}/G \cong X$.

In diesem Zusammenhang werden wir von einer π -zulässigen (oder einfach zulässigen) Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}$ von X sprechen, falls für eine fest gewählte Komponente \tilde{U}_i von $\pi^{-1}(U_i)$ gilt: $\pi^{-1}(U_i) = \bigcup_{g \in G} g\tilde{U}_i$ und $\pi|_{g\tilde{U}_i} : g\tilde{U}_i \cong U$.

Die Abbildung π liefert uns eine Abbildung $\mathcal{T}_{\tilde{X}} \rightarrow \pi^*\mathcal{T}_X$. Da π lokal biholomorph ist, haben wir $\mathcal{T}_{\tilde{X}} \cong \pi^*\mathcal{T}_X$.

Wir wollen nun zeigen, dass sich flache Bündel und Bündel mit einem holomorphen Zusammenhang gleich verhalten unter Rückzug mit solchen Überlagerungsabbildungen. Dafür benötigen wir:

Lemma 4.6 — *Sei E ein Vektorbündel über X . Dann existiert eine natürliche G -Operation auf π^*E und es gelten*

$$(i) \quad \pi^*\mathcal{A}^0(X, E) = \mathcal{A}^0(\tilde{X}, \pi^*E)^G.$$

$$(ii) \quad \pi^*\mathcal{A}^{p,q}(X, E) = \mathcal{A}^{p,q}(\tilde{X}, \pi^*E)^G.$$

(iii) Die Abbildung $\pi^* : H^*(X, E) \rightarrow H^*(\tilde{X}, \pi^*E)$ ist injektiv und

$$\pi^*H^*(X, E) = H^*(\tilde{X}, \pi^*E)^G.$$

Beweis. Sei $\mathcal{U} = \{U_i\}$ eine zulässige Überdeckung von X , die E trivialisiert. Die Gruppe G operiert dann durch

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}_i \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{g \times id} & g\tilde{U}_i \times \mathbb{C}^n \\ & \searrow \pi \times id & \swarrow \pi \times id \\ & U_i \times \mathbb{C}^n & \end{array}$$

Da π surjektiv ist, ist die Abbildung auf den Schnitten injektiv.

(i) Für $s \in \mathcal{A}^0(X, E)$ ist nach Definition $\pi^*(s)(\tilde{x}) = \pi^*(s)(gx)$. Ist umgekehrt $\tilde{s} \in \mathcal{A}^0(\tilde{X}, \pi^*E)^G$, so definieren wir einen Schnitt s durch $s(x) = \tilde{s}(\tilde{x})$ für ein $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$. Nach obigem Diagramm ist s wohldefiniert und glatt, und $\pi^*(s) = \tilde{s}$.

(ii) Wir haben nach (i)

$$\begin{aligned} & \pi^* \mathcal{A}^{p,q}(X, E) \\ &= \pi^* \mathcal{A}^0(X, \Lambda^p T^{1,0} X \otimes \Lambda^q T^{0,1} X \otimes E) \\ &= \mathcal{A}^0(\tilde{X}, \Lambda^p T^{1,0} \tilde{X} \otimes \Lambda^q T^{0,1} \tilde{X} \otimes \pi^* E)^G \\ &= \mathcal{A}^{p,q}(\tilde{X}, \pi^* E)^G. \end{aligned}$$

(iii) Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}^p(X, E) & \xrightarrow{\pi^*} & \mathcal{A}^p(\tilde{X}, \pi^* E)^G & \longrightarrow & \mathcal{A}^p(\tilde{X}, \pi^* E) \\ \downarrow \bar{\partial} & & \downarrow \bar{\partial} & \swarrow \bar{\partial} & \\ \mathcal{A}^{p+1}(X, E) & \xrightarrow{\pi^*} & \mathcal{A}^{p+1}(\tilde{X}, \pi^* E) & & \end{array}$$

Ist $\alpha \in \mathcal{A}^{p+1}(X, E)$ eine geschlossene Form, so dass $[\pi^* \alpha] = 0$ in $H^{p+1}(\tilde{X}, \pi^* E)$, also $\pi^* \alpha = \bar{\partial} \beta$ für ein $\beta \in \mathcal{A}^p(\tilde{X}, \pi^* E)$, so definieren wir $\beta' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^* \beta \in \mathcal{A}^p(\tilde{X}, \pi^* E)^G$. Es gilt

$$\bar{\partial} \beta' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{\partial} g^* \beta = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^* \pi^* \alpha = \pi^* \alpha.$$

Nach (ii) gibt es ein $\alpha' \in \mathcal{A}^p(X, E)$ mit $\pi^* \alpha' = \beta'$. Da das Diagramm kommutiert und π^* auf Formen injektiv ist, ist $\bar{\partial} \alpha' = \alpha$ und $[\alpha] = 0$ in $H^{p+1}(X, E)$.

Ist α ein Repräsentant für $[\alpha] \in H^p(\tilde{X}, \pi^* E)^G$, so betrachten wir ähnlich wie zuvor $\alpha' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^* \alpha \in \pi^* \mathcal{A}^p(X, E)$. Dann ist

$$[\alpha'] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^* [\alpha] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} [\alpha] = [\alpha]$$

und $[\alpha] \in \pi^* H^p(X, E)$. Die andere Inklusion ist klar. \square

Nun erhalten wir das angekündigte Ergebnis:

Satz 4.7 — Sei $\tilde{X} \rightarrow X$ eine endliche, reguläre Überlagerung und E ein Vektorbündel auf X . Dann gilt:

- (i) $E \in \mathfrak{A}t(X) \Leftrightarrow \pi^*E \in \mathfrak{A}t(\tilde{X})$.
- (ii) $E \in \mathfrak{F}l(X) \Leftrightarrow \pi^*E \in \mathfrak{F}l(\tilde{X})$.

Beweis.

- (i) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi^* : H^1(X, \text{End}(E) \otimes \Omega_X^1) &\rightarrow H^1(\tilde{X}, \pi^* \text{End}(E) \otimes \Omega_{\tilde{X}}^1) \\ A(E) &\mapsto A(\pi^*E) \end{aligned}$$

ist injektiv, das heißt $A(E) = 0$ genau dann, wenn $A(\pi^*E) = 0$.

- (ii) Nach Bemerkung 1.10 ist der Rückzug eines flachen Bündels flach. Sei nun E ein beliebiges Bündel auf X , so dass π^*E flach ist. Sei ∇ ein flacher Zusammenhang auf π^*E . Für eine Decktransformation $g \in G$ identifiziert sich $g^*\pi^*E$ kanonisch mit π^*E . Mit diesen Identifikationen hat der Ausdruck

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^* \nabla$$

Sinn und definiert einen flachen, G -invarianten Zusammenhang auf π^*E . Dieser steigt zu einem flachen Zusammenhang auf E ab. \square

Wir erhalten als nützliche Folgerung

Korollar 4.8 — Sei $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ eine endliche Überlagerung. Dann gilt

$$\mathfrak{F}l(X) = \mathfrak{A}t(X) \Leftrightarrow \mathfrak{F}l(\tilde{X}) = \mathfrak{A}t(\tilde{X}).$$

4.4 Faserungen

Für gewisse Faserungen $X \rightarrow Y$ von komplexen Mannigfaltigkeiten können wir flache Bündel auf der Basis und auf X in Beziehung setzen. Dies wird später nützlich sein, um weitere Beispiele von Mannigfaltigkeiten zu erzeugen, auf denen $\mathfrak{A}t(X) = \mathfrak{F}l(X)$ gilt.

Zunächst benötigen wir:

Lemma 4.9 — Sei $f : X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung, die einen Schnitt $s : Y \rightarrow X$ hat.

- (i) Falls $\mathfrak{F}l(X) = \mathfrak{A}t(X)$, so gilt auch $\mathfrak{F}l(Y) = \mathfrak{A}t(Y)$.

- (ii) Sei $f : X \rightarrow Y$ nun zusätzlich eine lokal triviale Faserung[†] komplexer Mannigfaltigkeiten mit kompakter typischer Faser F . Sei E ein holomorphes Vektorbündel auf X , dessen Einschränkungen auf die Fasern trivial sind. Dann ist E genau dann flach, wenn s^*E flach ist.

Beweis.

- (i) Sei $E \in \mathfrak{A}t(Y)$. Nach Voraussetzung ist f^*E flach und somit auch $E = s^*f^*E$.
- (ii) Die Bedingung ist offensichtlich notwendig. Sei nun also s^*E flach. Unter den obigen Voraussetzungen ist f eine flache Abbildung, und $h^0(f^{-1}(y), E|_{f^{-1}(y)})$ ist konstant auf Y . Wir können also den Satz über Basiswechsel anwenden ([21], §5 Corollary 2). Also ist $E' := f_*E$ lokal frei und $f^*E' \cong E$. Da s ein Schnitt ist, ist $s^*f^* = id$ und somit $E' = s^*f^*E' = s^*E$ flach, das heißt, auch E ist flach. \square

Nun folgt leicht

Satz 4.10 — Sei $f : X \rightarrow Y$ eine lokal triviale Faserung komplexer Mannigfaltigkeiten mit kompakter, einfach zusammenhängender typischer Faser F und einem Schnitt $s : Y \rightarrow X$. Ist $\mathfrak{A}t(F) = \mathfrak{F}l(F)$, so gilt

$$\mathfrak{A}t(X) = \mathfrak{F}l(X) \Leftrightarrow \mathfrak{A}t(Y) = \mathfrak{F}l(Y).$$

Beweis. Ist E ein Vektorbündel mit holomorphem Zusammenhang auf X , so ist die Einschränkung auf jede Faser nach Voraussetzung flach und somit trivial. Das vorherige Lemma liefert die Behauptung. \square

Sind X eine Mannigfaltigkeit und $V \rightarrow X$ ein Vektorbündel, so können wir den Satz zum Beispiel auf $\mathbb{P}(V \oplus \mathcal{O}_X) \rightarrow X$ anwenden. Wir werden dies in Abschnitt 5 mit Regelflächen tun.

Der Satz lässt sich noch ein wenig verschärfen.

Korollar 4.11 — Die Aussage des Satzes gilt auch, wenn die Fundamentalgruppe der Faser endlich ist.

Beweis. Wir möchten eine endliche Überlagerung

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \longrightarrow & X \\ & \searrow & \swarrow \\ & Y & \end{array}$$

finden, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Dann können wir Korollar 4.8 anwenden.

[†]Nach einem Ergebnis von Fischer und Grauert ist jede glatte Familie, deren Fasern alle als komplexe Mannigfaltigkeiten isomorph sind, schon lokal trivial [10].

Der Schnitt s legt in jeder Faser einen Basispunkt fest. In einer lokalen Trivialisierung über $U \subset Y$ definieren wir $\tilde{X}|_U = \tilde{F} \times U \rightarrow F \times U \cong X|_U$, wobei \tilde{F} die universelle Überlagerung von F ist. \tilde{F} ist wieder kompakt, da die Fundamentalgruppe von F endlich ist.

Wir wählen einen Lift $\tilde{s}_U : U \rightarrow \tilde{F} \times U$ von s . Dieser legt auch in jeder Faser \tilde{F} einen Basispunkt fest. Zu einer weiteren Trivialisierung über $V \subset Y$ mit Lift \tilde{s}_V und $U \cap V \neq \emptyset$ gibt es dann einen eindeutig bestimmten Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} U \cap V \times \tilde{F} & \xrightarrow{\exists!} & U \cap V \times \tilde{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U \times F \supset U \cap V \times F & \xrightarrow{\cong} & U \cap V \times F \subset V \times F \end{array}$$

der die Basispunkte in den einzelnen Fasern ineinander überführt und somit \tilde{s}_U in \tilde{s}_V abbildet. Mittels dieser Isomorphismen verklebt die lokale Konstruktion zu einer Faserung $\tilde{X} \rightarrow Y$, die die gewünschten Eigenschaften hat, wenn wir bemerken, dass wegen Korollar 4.8 auch $\mathfrak{A}t(\tilde{F}) = \mathfrak{F}l(\tilde{F})$ gilt. \square

4.5 Infinitesimale Produkte

Sei $B = B_\epsilon(0) \subset \mathbb{C}$ eine Kreisscheibe und Y eine komplexe Mannigfaltigkeit. In Lemma 4.9 hatten wir gesehen, dass alle Vektorbündel mit einem holomorphen Zusammenhang auf Y eine flache Struktur besitzen, falls die beiden Klassen auf $X = Y \times B$ übereinstimmen. In diesem Abschnitt werden wir auch die umgekehrte Aussage beweisen.

Wir bezeichnen mit $\Psi : X \rightarrow Y$ die Projektion und identifizieren stillschweigend Y mit $Y \times \{0\}$. Sei t die Koordinate in B .

Satz 4.12 — *Sei E ein Vektorbündel auf X , dessen Atiyah-Klasse verschwindet und seien $E^t = E|_{Y \times \{t\}}$ die Einschränkungen von E . Dann ist $E \cong \Psi^* E^0$. Insbesondere ist E genau dann flach, wenn E^0 flach ist.*

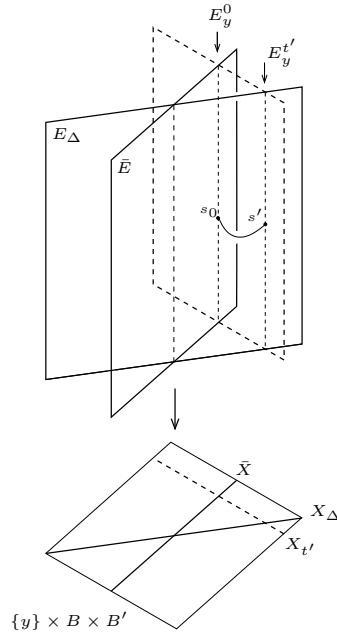
Wir werden eine Art Paralleltransport bezüglich eines holomorphen Zusammenhangs durchführen. Die benötigten Details haben wir in Anhang A.2 zusammengestellt.

Beweis des Satzes. Die folgende Konstruktion ist für ein festes $y \in Y$ in Abbildung 1 schematisch angedeutet.

Sei $B' = B$ eine weitere Kreisscheibe. Wir betrachten das Produkt $Z = X \times B'$ mit den Projektionen $p : Z \rightarrow Y$, $q : Z \rightarrow B$ und $r : Z \rightarrow B'$.

Wir können X auf verschiedene Weise in Z einbetten:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= Y \times \{0\} \times B' \\ X_{t'} &= X \times \{t'\} \\ X_\Delta &= \{(y, t, t') \in Z \mid t = t'\} \end{aligned}$$

Abbildung 1: Situation für ein festes y in Y

Die Einbettungen identifizieren wir jeweils mit X .

Wir betrachten nun das Vektorbündel $(p \times q)^*E$ und beobachten (vgl. Abbildung 1):

$$\begin{aligned}\bar{E} &= (p \times q)^*E|_{\bar{X}} = \Psi^*E^0 \\ (p \times q)^*E|_{X_{t'}} &= E \\ E_\Delta &= (p \times q)^*E|_{X_\Delta} = E\end{aligned}$$

Die hintere Gleichheit gilt jeweils unter den Identifikation von X mit dem entsprechenden Teilraum.

Das Tangentialbündel von Z ist

$$\mathcal{T}_Z \cong p^*\mathcal{T}_Y \oplus q^*\mathcal{T}_B \oplus r^*\mathcal{T}_{B'},$$

und das holomorphe Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial t}$ auf B induziert ein Vektorfeld auf Z , das wir wieder mit $\frac{\partial}{\partial t}$ bezeichnen. Die zugehörige Integralkurve $u_{\bar{x}}(t)$ durch $\bar{x} = (y, 0, t')$ ist

$$\begin{aligned}u_{\bar{x}} : B &\rightarrow Z \\ t &\mapsto (y, t, t').\end{aligned}$$

Für ein festes t' liegen die Bilder der Integralkurven $u_{(y,t')}$ ganz in $X_{t'}$.

Sei nun D ein holomorpher Zusammenhang in $(p \times q)^*E$. Wir möchten zeigen, dass der Paralleltransport entlang $\frac{\partial}{\partial t}$ einen Isomorphismus zwischen \bar{E} und E_Δ induziert.

Sei $\bar{x} = (y, 0, t') \in \bar{X}$ und $\bar{s} \in \bar{E}_{\bar{x}}$ ein Element in der Faser. Dann gibt es nach Proposition A.3 einen eindeutig bestimmten holomorphen Schnitt

$$s(t) = s(t, \bar{x}, \bar{s}) : B \rightarrow (p \times q)^*E$$

mit

$$s(t) \in ((p \times q)^*E)_{u_{\bar{x}}(t)} \text{ und } D_{u_{\bar{x}}} s = 0,$$

der holomorph von \bar{x} und s_0 abhängt.

Dies ist gerade der Paralleltransport im Vektorbündel E über $X_{t'}$. Insbesondere ist $s' = s(t') \in E_y^{t'}$.

Insgesamt erhalten wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Theta : \bar{E} &\rightarrow E_\Delta \\ \bar{x} = (y, 0, t') &\mapsto (y, t', t') = x' \\ \bar{s} \in \bar{E}_{\bar{x}} &\mapsto s' = s(t', \bar{x}, s_0) \in E_{\Delta, x'}. \end{aligned}$$

Diese ist holomorph in allen Variablen und ein linearer Isomorphismus in den Fasern, mit anderen Worten ein Isomorphismus von Vektorbündeln

$$\bar{\Psi}^* E^0 = \bar{E} \cong E_\Delta = E.$$

Die zweite Aussage des Satzes ist jetzt offensichtlich. \square

Wir erhalten nun einige Folgerungen

Korollar 4.13 — *Es gilt:*

- (i) *Die Aussage des Satzes gilt auch, falls $B \subset \mathbb{C}^n$ eine Polydisk ist.*
- (ii) *In der obigen Situation gilt*

$$\mathfrak{At}(Y) = \mathfrak{Fl}(Y) \Leftrightarrow \mathfrak{At}(Y \times B) = \mathfrak{Fl}(Y \times B).$$

- (iii) *Alle Vektorbündel mit verschwindender Atiyah-Klasse auf einer Polydisk sind trivial.*

Beweis. Die erste Aussage folgt durch Induktion. Die zweite folgt sofort aus dem Satz. Für die letzte setzen wir $Y = \{pt\}$. \square

Bemerkung 4.14 — Die letzte Aussage folgt auch aus allgemeinen Sätzen über Steinmannigfaltigkeiten (vgl. [12]).

Korollar 4.15 — Seien C und C' nicht rationale Kurven und E ein Vektorbündel mit verschwindender Atiyah-Klasse auf $C \times C'$. Dann besitzt E eine flache Struktur.

Beweis. Seien $p : B \rightarrow C$ und $p' : B' \rightarrow C'$ die universellen Überlagerungen. B und B' sind Kreisscheiben und wir erhalten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & B & \longleftarrow & B \times B' & \longrightarrow & B' \\
 & \swarrow p & & \swarrow p \times id & & \swarrow id \times p' \\
 C & \xleftarrow{q} & C \times B' & & B \times C' & \xrightarrow{q'} C' \\
 & & \searrow id \times p' & & \swarrow p \times id & \\
 & & & C \times C' & &
 \end{array}$$

Das Bündel $(p \times p')^*E$ ist nach Korollar 4.13 trivial. Es bleibt zu zeigen, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(C \times C') = \pi_1(C) \times \pi_1(C')$ mittels einer Darstellung darauf operiert.

Wenden wir den Satz auf $(p \times id)^*E$ an, erhalten wir

$$(p \times id)^*E \cong q'^*E_{\rho'}$$

für ein flaches Bündel $E_{\rho'} \rightarrow C'$ zu einer Darstellung ρ' von $\pi_1(C')$.

Wegen der Kommutativität des Diagramms, operiert $\pi_1(C')$ auch auf $(p \times p')^*E$ mit der Darstellung ρ' .

Für die Operation von $\pi_1(C)$ verfahren wir analog. Somit ist E flach. \square

5 Projektive Flächen

Im Lichte des Ergebnisses aus Abschnitt 4.1 liegt es nahe, zu untersuchen, ob die beiden untersuchten Klassen von Vektorbündeln auf projektiven Flächen übereinstimmen. Wir bedienen uns hierfür ohne Beweis der Enriques-Klassifikation, die man zum Beispiel in ([3], Chapter VI) oder ([11], Chapter 10) findet.

Wir erinnern kurz an die Definition der Kodaira-Dimension: Sei X zusammenhängend. Der kanonische Ring von X

$$R(X) = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, K_X^m)$$

ist dann ein Integritätsbereich und wir können seinen Quotientenkörper $Q(R(X))$ betrachten. Wir definieren dann

$$\text{kod}(X) = \begin{cases} -\infty & \text{falls } R(X) = \mathbb{C} \\ \text{trdeg}_{\mathbb{C}} Q(R(X)) - 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Kodaira-Dimension ist immer kleiner oder gleich der algebraischen Dimension von X , die wiederum kleiner als die Dimension von X ist nach dem Satz von Siegel (vgl. [14], Chapter 2).

Bei der Klassifikation werden die Fälle $\text{kod}(X) = -\infty, 0, 1$ und 2 unterschieden. In Abschnitt 4.2 hatten wir gezeigt, dass es reicht, Vektorbündel auf einem minimalen Modell in jeder birationalen Äquivalenzklasse zu studieren.

Um die Frage, ob ein gegebenes Bündel mit einem holomorphen Zusammenhang flach ist, auf Flächen reduzieren zu können, haben wir das Bündel sukzessive auf Hyperebenenschnitte hohen Grades eingeschränkt. Ist genauer L ein positives Geradenbündel auf X und S mit $\mathcal{O}_X(S) = L^n$ eine solche Hyperfläche, so ist das kanonische Bündel

$$K_S = (K_X \otimes \mathcal{O}_X(S))|_S$$

nach der Adjunktionsformel. Das kanonische Bündel wird in einem gewissen Sinne mit jeder Einschränkung auf eine Hyperfläche positiver und hat also eher viele Schnitte. Die Kodaira-Dimension der am Ende resultierenden Fläche wird deshalb tendenziell eher *groß* sein.

Die erzielten Ergebnisse implizieren, dass die beiden Klassen $\mathfrak{A}(X)$ und $\mathfrak{F}(X)$ auf Flächen nicht negativer Kodaira-Dimension übereinstimmen. Leider konnten für Flächen höherer Kodaira-Dimension keine generellen Resultate erzielt werden.

5.1 Kodaira-Dimension $-\infty$

Flächen mit Kodaira-Dimension $-\infty$ sind entweder rational oder Regelflächen. Die minimalen Modelle sind innerhalb einer birationalen Äquivalenzklasse nicht eindeutig, aber es reicht uns, eins zu betrachten.

Rationale Flächen sind solche, die birational äquivalent zu \mathbb{P}^2 sind, und wir hatten in Korollar 1.16 gesehen, dass alle Vektorbündel mit holomorphem Zusammenhang auf \mathbb{P}^n schon trivial und somit auch flach sind.

Eine Regelfläche lässt sich als Faserung über einer Kurve darstellen, bei der mindestens eine Faser isomorph zu \mathbb{P}^1 ist. Jede dieser Flächen ist birational äquivalent zu einer geometrischen Regelfläche, i.e. einer glatten Faserung $X \rightarrow C$ über einer Kurve mit Faser \mathbb{P}^1 . Diese besitzt einen Schnitt ([11], Chapter 5, Theorem 9), so dass wir Satz 4.10 anwenden können.

Auf Flächen mit Kodaira-Dimension $-\infty$ sind Vektorbündel mit verschwindender Atiyah-Klasse also immer flach.

5.2 Kodaira-Dimension null

Auch auf allen Flächen mit Kodaira-Dimension null impliziert das Verschwinden der Atiyah-Klasse schon die Flachheit eines Bündels. Die minimalen Modelle sind hier eindeutig. Wir werden die einzelnen Klassen kurz beschreiben und auf die entsprechenden Resultate verweisen.

Projektive Tori Tori sind Flächen der Gestalt \mathbb{C}^2/Γ für ein Gitter Γ . Tori haben triviales kanonisches Bündel und wir können Korollar 3.5 anwenden. Einen anderen Beweis gibt der Artikel von A. Morimoto [20].

K3-Flächen K3-Flächen sind Flächen mit trivialem kanonischen Bündel und erster Betti-Zahl $b_1(X) = 0$. Wieder können wir Korollar 3.5 anwenden.

Enriques Flächen Diese sind Flächen mit $b_1(X) = 0$ und $K_X \neq 0$ aber $K_X^2 = 0$. Enriques Flächen werden 2-1 von K3-Flächen überlagert und das Resultat folgt mit dem oben gesagten aus Korollar 4.8.

Hyperelliptische Flächen Hyperelliptische Flächen werden von Produkten von Kurven endlich überlagert (vgl. [3], V.5.). Nach Korollar 4.15 sind Vektorbündel mit verschwindender Atiyah-Klasse auf Produkten von Kurven flach und wir können wieder Korollar 4.8 anwenden.

5.3 Kodaira-Dimension eins und zwei

Flächen mit Kodaira-Dimension eins sind elliptische Faserungen, d.h. Faserungen $X \rightarrow C$ über einer Kurve, deren generische Faser eine glatte elliptische Kurve ist. Flächen mit Kodaira-Dimension zwei heißen von allgemeinem Typ.

Auf einzelne Flächen aus diesen beiden Klassen lassen sich unsere Ergebnisse anwenden, zum Beispiel auf Produkte von Kurven entsprechenden Grades. Es ist jedoch nicht gelungen, für größere Klassen allgemeine Resultate zu erzielen.

A Anhang

A.1 Kohärente Garben mit holomorphem Zusammenhang

Wie in Abschnitt 3 angekündigt, wollen wir noch zeigen:

Bemerkung 3.7 — Jede kohärente Garbe mit einem holomorphen Zusammenhang ist lokal frei.

Das ist eigentlich nichts anderes als die Erweiterung eines Lemmas, das in [6] für D-Moduln bewiesen ist.

Lemma A.1 — Sei \mathcal{F} eine kohärente \mathcal{O}_x -Garbe, die einen holomorphen Zusammenhang besitzt, das heißt eine Abbildung

$$D : \mathcal{F} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes \mathcal{F},$$

die die Leibnizregel erfüllt. Dann ist \mathcal{F} lokal frei

Beweis. Sei x ein Punkt in X , und sei s_1, \dots, s_r eine Basis für \mathcal{F}_x . Nakayamas Lemma besagt nun, dass diese Schnitte \mathcal{F} in einer kleinen Umgebung um x erzeugen.

Um zu zeigen, dass sie linear unabhängig sind, nehmen wir an, es gäbe eine nicht triviale Relation

$$\sum_{i=1}^r \phi_i s_i = 0$$

mit gewissen lokalen Funktionen ϕ_i . Sei ν die minimale Ordnung, zu der ein ϕ_i in x verschwindet. Da die $s_i(x)$ eine Basis von \mathcal{F}_x sind, ist $\nu > 0$. Wenn wir aus einer solchen Relation eine neue Relation der s_i konstruieren können, die zu echt kleinerer Ordnung verschwindet, so erhalten wir induktiv eine Relation mit $\nu = 0$ - ein Widerspruch.

Sei ohne Einschränkung $\nu = \text{ord}_x \phi_1$. In einer kleinen Umgebung gibt es nun ein holomorphes Vektorfeld ξ , so dass $\partial_\xi \phi_1$ in x mit kleinerer Ordnung als ν verschwindet. Dann gilt mit der Leibnizregel

$$0 = D_\xi(\sum \phi_i s_i) = \sum \partial_\xi \phi_i \otimes s_i + \sum \phi_i D_\xi s_i.$$

Die Faktoren vor s_1 im zweiten Summanden verschwinden alle mindestens zur Ordnung ν in x , so dass insgesamt der Faktor vor s_1 mit echt kleinerer Ordnung, nämlich mit der von $\partial_\xi \phi_1$ in x verschwindet. Also kann es keine nicht triviale Relation geben, und \mathcal{F} ist lokal frei. \square

A.2 Parallelverschiebung mit holomorphen Zusammenhängen

In Abschnitt 4.5 haben wir das aus der Differentialgeometrie bekannte Konzept des Paralleltransports auf einen holomorphen Zusammenhang angewandt. Dies soll nun näher erklärt werden.

Zunächst erinnern wir kurz an den reellen Fall (vgl. z.B. [26] oder [18]):

Sei ξ ein differenzierbares Vektorfeld auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M . Eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ heißt Integralkurve zu ξ , wenn in jedem Punkt

$$\dot{\gamma}(t) = \xi(\gamma(t)) \quad (9)$$

gilt. Wir wollen diese Gleichung in lokalen Koordinaten betrachten.

Seien dafür $x = (x_1, \dots, x_n)$ eine lokale Karte um $m_0 = \gamma(0)$ und $\xi = \sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ die Darstellung von ξ in diesen Koordinaten. Die Gleichung (9) übersetzt sich dann

$$d\gamma \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = \sum_i \frac{d(x_i \circ \gamma)}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)} = \sum_i \xi_i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)}.$$

Schreiben wir $\gamma_i = x_i \circ \gamma$, so ist γ genau dann Integralkurve zu ξ durch m_0 , wenn jeweils γ_i die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d\gamma_i}{dt} \Big|_t = \xi_i \circ x^{-1}(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \quad \gamma_i(0) = x_i(m_0) \quad (10)$$

ist.

Sei m_0 ein Punkt in M . Die Standardsätze über Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen stellen nun die Existenz einer eindeutigen, maximalen Integralkurve γ mit $\gamma(0) = m_0$ sicher.

Der entscheidende Punkt ist hierbei, dass für zwei Integralkurven $\gamma : I \rightarrow M$ und $\gamma' : I' \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = \gamma'(0) = m_0$ der gemeinsame Definitionsbereich $I \cap I'$ zusammenhängend ist. Da die beiden Kurven in einem Punkt übereinstimmen, stimmen sie dann schon auf dem ganzen Durchschnitt überein.

Sei nun E ein differenzierbares Vektorbündel auf M mit einem Zusammenhang ∇ . Ein Schnitt s von E heißt parallel bezüglich des Vektorfeldes ξ , falls $\nabla_\xi s = 0$. Sei γ eine Integralkurve zu ξ mit $\gamma(0) = m_0$. Wir wollen nun ein Element s_0 in der Faser E_{m_0} über m_0 parallel verschieben, das heißt, wir suchen einen Schnitt s von $E|_{\text{Bild}\gamma(t)}$, so dass

$$\nabla_{\xi(\gamma(t))} s \circ \gamma(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} s \circ \gamma(t) = 0 \quad \text{und} \quad s(0) = s_0.$$

Lokal entspricht das wieder einer Lösung einer Differentialgleichung: Schreiben wir in einer Trivialisierung $\nabla = d + A$ mit einer Matrix von

1-Formen A , so ist das gesuchte s die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$s \circ \gamma(0) = s_0,$$

$$\frac{d}{dt} s \circ \gamma(t) = \dot{\gamma}(t)(s \circ \gamma(t)) = d_{\dot{\gamma}(t)} s \circ \gamma(t) = -A(\dot{\gamma}(t)) \cdot s \circ \gamma(t).$$

Die Lösung lässt sich nun eindeutig als Schnitt über die ganze Kurve γ fortsetzen.

Wir möchten die gleiche Technik für einen holomorphen Zusammenhang auf einem holomorphen Vektorbündel anwenden. Das Problem ist, dass es zu einem holomorphen Vektorfeld im Allgemeinen keine eindeutig bestimmte, maximale (komplexe) Integralkurve im obigen Sinne gibt. Zum Beispiel ist für das Vektorfeld $\frac{1}{z} \frac{d}{dz}$ auf \mathbb{C}^* jeder Zweig des Logarithmus eine komplexe Integralkurve; zwei verschiedene Zweige stimmen jedoch niemals in ihrem gemeinsamen Definitionsgebiet überein.

Weiterhin gibt es oft keine globalen, holomorphen Vektorfelder. Wir werden uns deshalb auf die lokale Situation beschränken.

Der folgende Satz, eine natürliche Erweiterung von Satz 8.II in [25], gibt uns Auskunft über die Lösungen holomorpher Differentialgleichungen. Wir schreiben jeweils $|\cdot|$ für die euklidische Norm.

Satz A.2 — Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ und sei $U \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ eine offene Menge, die die abgeschlossene Polydisk

$$B = \overline{B}_\alpha(0) \times \overline{B}_{\beta=(\beta+\delta, \dots, \beta+\delta)}(0) \times \overline{B}_\gamma(0)$$

enthält. Sei $f = f(t, u, \lambda) : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine in allen Variablen holomorphe Funktion und $|f|_B \leq M$. Sei $a < \min(\alpha, \beta/M)$. Dann hat das vom Parameter λ abhängige Anfangswertproblem

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u(t), \lambda), \quad u(0) = z_0 \tag{11}$$

für jedes $z_0 \in B_{\delta=(\delta, \dots, \delta)}(0) \subset \mathbb{C}^n$ eine Lösung $u(t, \lambda, z_0)$. Diese ist holomorph in allen Variablen und existiert mindestens auf $B_a(0) \times B_\gamma(0) \times B_\delta(0)$.

Zwei Lösungen u und v von (11), definiert auf offenen Umgebungen W_u und W_v , stimmen auf der Zusammenhangskomponente der Null von $W_u \cap W_v$ überein.

Ist W einfach zusammenhängend und ist $f(t, u, \lambda)$ auf $W \times \mathbb{C}^n \times B_\gamma(0)$ definiert, so lässt sich die Lösung auf ganz W fortsetzen.

Beweis. Auf $\overline{B}_a(0) \times \overline{B}_\beta(0) \times \overline{B}_\gamma(0)$ ist f nach u insbesondere stetig differenzierbar und erfüllt somit eine Lipschitzbedingung

$$|f(t, u_1, \lambda) - f(t, u_2, \lambda)| \leq L|u_1 - u_2|. \tag{12}$$

Das Anfangswertproblem (11) ist dort äquivalent zu der Integralgleichung

$$u(t) = z_0 + \int_0^t f(\zeta, u(\zeta), \lambda) d\zeta.$$

Das Integral ist als Wegintegral über einen beliebigen Weg, der 0 und t verbindet, zu verstehen. Da $B_a(0)$ einfach zusammenhängend ist, ist das Integral unabhängig von der Wahl des Weges wegen des Cauchy-Integralsatzes. Sei \mathcal{B} der Raum der auf $B_a(0)$ beschränkten, holomorphen Funktionen $u(t)$. Mit der Norm

$$\|u\| = \sup_{t \in B_a(0)} |u(t)| e^{-2L|t|}$$

wird \mathcal{B} zum Banachraum.

Wir fixieren zunächst $z_0 \in B_\delta(0)$ und $\lambda \in B_\gamma(0)$. Sei

$$D_{z_0} = \{u \in \mathcal{B} \mid |u(t) - z_0| \leq \beta \text{ für alle } t \in B_a(0)\}.$$

Eine Funktion $u \in D_{z_0}$ nimmt Werte in $B_{\tilde{\beta}}(0)$ an (Dreiecksungleichung), und der Operator

$$Tu = z_0 + \int_0^t f(\zeta, u(\zeta), \lambda) d\zeta \quad (13)$$

ist wohldefiniert. Die Lösungen des Anfangswertproblems (11) sind gerade die Fixpunkte von T .

Wir wollen nun den Banachschen Fixpunktsatz auf T anwenden. Dafür zeigen wir:

(i) T bildet D_{z_0} in sich ab.

(ii) T genügt in D_{z_0} einer Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante $\frac{1}{2}$.

Zu (i). Für u in D_{z_0} ist

$$|Tu(t) - z_0| = \left| \int_0^t f(\zeta, u(\zeta), \lambda) d\zeta \right| \leq M|t| \leq Ma \leq \beta.$$

Zu (ii). Sind $u, v \in D_{z_0}$, so berechnen wir

$$|Tu(t) - Tv(t)| = \left| \int_0^t f(\zeta, u(\zeta), \lambda) - f(\zeta, v(\zeta), \lambda) d\zeta \right|$$

Wir wählen $\zeta(x) = xe^{\arg t}$ ($0 \leq x \leq |t|$) als Integrationsweg und erhalten

$$= \left| \int_0^{|t|} (f(\zeta(x), u(\zeta(x)), \lambda) - f(\zeta(x), v(\zeta(x)), \lambda)) e^{\arg t} dx \right|$$

und mit (12)

$$\begin{aligned} &\leq L \int_0^{|t|} |u(\zeta(x)) - v(\zeta(x))| e^{-2Lx} e^{2Lx} dx \\ &\leq \|u - v\| \int_0^{|t|} e^{2Lx} dx \leq \frac{1}{2} \|u - v\| e^{2L|t|}. \end{aligned}$$

Nun folgt (ii), $\|Tu - Tv\| \leq \frac{1}{2} \|u - v\|$ für $u, v \in D_{z_0}$, aus der Definition der Norm.

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz besitzt T in D_{z_0} genau einen Fixpunkt $u(t, \lambda, z_0)$, und die Folge

$$u_0(t, \lambda, z_0) = z_0, \quad u_{n+1} = Tu_n = z_0 + \int_0^t f(\zeta, u_n(\zeta), \lambda) d\zeta$$

konvergiert gleichmäßig gegen $u(t, \lambda, z_0)$. Jedes der u_n ist holomorph von λ und z_0 abhängig, und damit gilt dies auch für den gleichmäßigen Limes u .

Sind nun u, v zwei Lösungen von (11) in einer zusammenhängenden, offenen Menge V , die z_0 enthält, so ist nach dem oben gesagten $\{t \in V \mid u(t) = v(t)\}$ offen und abgeschlossen und damit ganz V .

Ist f auf $W \times \mathbb{C}^n \times B_\gamma(0)$ definiert und ist W einfach zusammenhängend, so können wir die lokale Lösung $u(t, \lambda, z)$ wegen der lokalen Existenz und Eindeutigkeit entlang jeder Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow W$ analytisch fortsetzen. Aus dem Monodromiesatz folgt, dass die Fortsetzung unabhängig von der gewählten Kurve γ ist und wir erhalten eine Lösung auf ganz W . \square

Betrachten wir jetzt die lokale Situation. Seien E ein holomorphes Vektorbündel auf einer komplexen Mannigfaltigkeit X und D ein holomorpher Zusammenhang auf E . Zu einem lokalen holomorphen Vektorfeld ξ finden mit dem obigen Satz wir eine kleine Umgebung $B_\delta(0) \cong U \subset X$ und eine holomorphe Funktion $u(t, z) : B_a(0) \times U \rightarrow X$, die für festes z eine komplexe Interalkurve durch z ist, nämlich

$$u(0, z) = z \text{ und } \frac{d}{dt} u(t, z) = \xi(u(t, z)).$$

Wir können nun einen lokalen Schnitt $s : U \rightarrow E|_U$ entlang dieser Integralkurven parallel verschieben. Nehmen wir dazu an, dass E in einer geeigneten Umgebung trivial ist, und schreiben $D = \partial + A$ für eine Matrix von holomorphen 1-Formen A . Gesucht ist nun ein lokaler Schnitt $\bar{s}(t, z)$ von E mit

$$D_{\xi(u(t,z))} \bar{s}(t, z) = 0 \text{ und } \bar{s}(0, z) = s(z), \quad (14)$$

und dies entspricht einer Lösung der (parameterabhängigen) Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} (\bar{s} \circ u(t, z)) = \partial_{\xi(u(t,z))} \bar{s} \circ u(t, z) = -A(\xi(u(t, z))) \cdot \bar{s}(t, z)$$

mit der gleichen Anfangsbedingung.

Wenden wir hierauf nun Satz A.2 an, so erhalten wir mit $U_t = \{u(t, x) \mid x \in U\}$:

Proposition A.3 — *In der obigen Situation gibt es zu jedem Schnitt s_0 genau eine Lösung $\bar{s}(t, z) = \bar{s}(t, z, s_0)$ des Anfangswertproblems (14), die auf ganz $B_a(0) \times U$ definiert ist. Sie hängt holomorph von t und s_0 ab und ist für ein festes t ein holomorpher Schnitt in $\Gamma(U_t, E)$, wobei $\bar{s}(t, z) \in E_{u(t, z)}$ ist.*

Da die lokalen Lösungen eindeutig sind, funktionieren die gleichen Argumente auch, falls E in der entsprechenden Umgebung nicht trivial ist.

Literatur

- [1] D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki, J. Włodarczyk, *Torification and factorisation of birational maps*, J. Amer. Soc. 15 (2002), 531-572.
- [2] M. F. Atiyah, *Complex analytic connections in fibre bundles*, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), 181-207.
- [3] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 4, Springer-Verlag, 1984.
- [4] I. Biswas, *On the Harder-Narasimhan filtration of the tangent bundle*, Comm. Anal. Geom. 3 (1995), 1-10.
- [5] I. Biswas, *Vector bundles with holomorphic connection over a projective manifold with tangent bundle of nonnegative degree*, Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), no. 10, 2827-2834.
- [6] A. Borel et al., *Algebraic D-moduls*, Perspectives in Mathematics, Vol. 2 (Ed. J. Coates, S. Helgason), Academic Press, 1987.
- [7] R. Bott, *On a theorem of Lefschetz*, Mich. Math. J. 6 (1959), 211-216.
- [8] P. Baum, R. Bott, *Singularities in holomorphic foliations*, J. Diff. Geom. 7 (1972), 181-207.
- [9] G.E. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer-Verlag, 1993.
- [10] W. Fischer, H. Grauert, *Lokal triviale Familien kompakter, komplexer Mannigfaltigkeiten*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II (1965), 89-94.
- [11] R.D. Friedman, *Algebraic surfaces and holomorphic vector bundles*, Universitext, Springer-Verlag, 1998.
- [12] H. Grauert, *Analytische Faserungen über holomorph vollständigen Räumen*, Math. Ann. 135 (1958), 260-273.
- [13] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.
- [14] D. Huybrechts, *Complex Geometry*, Universitext, Springer-Verlag, 2004.
- [15] S. Ishimura, *A descent problem of vectorbundles and its applications*, J. Math. Kyoto Univ. 23 (1983) no.1, 73-83.
- [16] S. Kebekus, R. Vakil, *Jets in Algebraic Geometry*, preprint, 2004.
- [17] S. Kobayashi, *Differential Geometry of complex vector bundles*, Publ. Math. Soc. Japan 15, Princeton Univ. Press and Iwanami Shoten, 1987.

- [18] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry I*, John Wiley & Sons, New York, 1963.
- [19] M. Maruyama, *The theorem of Grauert, Müllich, Spindler*, Math. Ann. 255 (1981), 317-333.
- [20] A. Morimoto, *Sur la classification des espaces fibrés vectoriels holomorphes sur un tore complexe admettant des connexions holomorphes*, Nagoya Math. J., 15 (1959), 83-154.
- [21] D. Mumford, *Abelian Varieties*, Oxford University Press, 1970.
- [22] C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler, *Vector bundles on complex projective spaces*, Progress in Mathematics 3, Birkhäuser, 1980.
- [23] J.-P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier 6 (1956), 1-42.
- [24] C. Simpson, *Higgs bundles and local systems*, Pub. Math. IHES 75 (1992), 5-95.
- [25] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen: eine Einführung*, 6., überarb. und erw. Aufl., Springer-Lehrbuch, Springerverlag, 1996.
- [26] F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Scott, Foresman and Company (Ed. I. M. Singer), 1971.
- [27] S.T. Yau, *On Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry*, Proc. Nat. Sci. U.S.A. 74 (1977), 1798-1799.

Danksagung

Ich möchte Prof. Daniel Huybrechts danken, dass er trotz langer Pausen bereit war, meine Diplomarbeit bis zum Ende zu betreuen. Ohne seine Unterstützung hätte ich diese Arbeit nicht anfertigen können.

Viele Leute am Mathematischen Institut haben geduldig meinen Fragen zugehört und mir Anregungen gegeben. Vor allem Oliver, Frederick, Dirk und Samuel waren immer bereit, einzelne Fragen mit mir zu diskutieren.

Herrn Kebekus und Herrn Toma verdanke ich den entscheidenden Hinweis für Abschnitt 4.5.

Ich danke meinen Eltern dafür, dass sie mir das Studium ermöglicht und mich immer bei allen meinen Plänen unterstützt haben.

Ich möchte mich besonders bei allen bedanken, die mich während meiner langen Krankheit und Genesung begleitet haben und auch in schwierigen Zeiten bei mir waren. Insbesondere möchte ich hier meine Eltern und Geschwister sowie Tina, Stephan und Stefania nennen. Auf sie konnte ich immer zählen. Mein Dank geht auch an das ganze Team der Somnia-Klinik. Ohne die Hilfe von M. Hammer und S. Hinners hätte ich nicht in mein Leben zurück gefunden.

Ich danke auch all den Freunden, die ich hier nicht namentlich nennen kann. Sie machen mein Leben zu dem, was es ist.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt habe. Ich habe alle Zitate und Quellen nach bestem Wissen und Gewissen kenntlich gemacht.